

1. CURVAS Y SUPERFICIES EN LA ARQUITECTURA E INGENIERÍA

Durante más de dos mil años las grandes estructuras, como bóvedas y cúpulas, han sido ideadas como cáscaras que cubren grandes luces. Hasta el siglo xx se han construido en fábrica de ladrillo, piedra o alguna clase de hormigón más o menos reforzado. Materiales muy capaces en compresión, pero bastante débiles en tracción. Entre los ejemplos más exitosos están el Panteón de Roma (124 d. C.; 43 metros de luz), o Santa Sofía de Constantinopla, Estambul (537 d. C.; 33 m), Santa María de las Flores de Florencia (1434; 41 m) o la basílica de San Pedro del Vaticano (1590; 42 m). En cualquiera de estos casos, la relación entre luz y espesor medio ronda 1/50. Durante la edad media las bóvedas góticas siguieron haciéndose cada vez más complejas y ricas, aunque las luces no aumentaron (Chilton, 2000).

En el siglo xx, con la llegada del hormigón armado y especialmente el pretensado, la esbeltez de las estructuras creció notablemente, dando lugar a cáscaras finas de increíble resistencia y estabilidad. Entre los ingenieros más destacados en la puesta en práctica de estas estructuras se encuentran Eduardo Torroja (1899-1961), Pier Luigi Nervi (1891-1979), Ove Arup (1895-1988), Nicolas Esquillan (1902-1989), Félix Candela (1910-1997), Heinz Isler (1926-2009), etc. Estos diseñadores utilizan en sus proyectos superficies definidas por ecuaciones matemáticas que han facilitado el cálculo de los esfuerzos de esas láminas de hormigón.

Las superficies de geometrías complejas transforman la materia para construir obras estructural y formalmente destacadas. Este libro se centra especialmente en la arquitectura y la ingeniería de los siglos xx y xxi. La ventaja de estudiar arquitectura contemporánea respecto de las obras históricas es la esbeltez de sus estructuras y la ausencia de decoración, pues estos rasgos las aproximan más al nivel de abstracción del análisis geométrico que aquí se propone. No obstante, el estudio de las estructuras históricas, como bóvedas, cúpulas, escaleras de caracol, capialzados, trompas, etc., están muy presentes en el enfoque del trabajo que sigue, tanto a nivel teórico como en los casos presentados.

Son, por tanto, objeto de este estudio las obras de arquitectura e ingeniería en los que las curvas y

superficies son rasgo de identidad de sus diseños. Destacan las curvas algebraicas, que son aquellas que verifican ecuaciones polinomiales, principalmente las que satisfacen una ecuación polinomial de segundo grado, aunque existen casos de obras que han utilizado otras curvas regulares en casi la totalidad de sus puntos, como la cicloide o la lemniscata. También son de gran importancia las curvas alabeadas, como las hélices, asociadas a escaleras de caracol y rampas helicoidales, o las curvas cuárticas, que se producen habitualmente como resultado de las intersecciones entre superficies.

Otro grupo importante para estudiar son las superficies cuádricas, que también verifican ecuaciones polinomiales de segundo grado en tres variables. Veremos tanto radiadas como hiperbólicas y elípticas. Además, nos interesan otras superficies regladas como las superficies helicoidales y los conoides. Entre estos últimos destacan especialmente, por su presencia en la arquitectura, los capialzados.

Se puede afirmar que la geometría diferencial de curvas y superficies nace con las lecciones de Monge, trabajo que continúan muchos matemáticos de la escuela francesa del siglo xix. Otra referencia fundamental es la de Gauss, que propuso estudiar las curvas y superficies por medio de representaciones paramétricas de los objetos. En lo que se refiere a curvas y superficies desde el punto de vista matemático, tanto la forma paramétrica como la forma implícita de definir curvas y superficies serán importantes a la hora de manejar una curva. Desde una parametrización podemos construir la curva sin más que dando valores al parámetro que la define, mientras que la forma implícita nos permite detectar de forma directa cuándo un punto pertenece o no a la curva, o la definición de curvas ligeramente perturbadas que se asemejan a la inicial sin más que sumar una cantidad suficientemente pequeña a la ecuación implícita que define la curva. Además, los elementos asociados a una curva, como los vectores tangente y normal, proporcionan un mayor conocimiento de esta (Lastra Sedano, 2021). Y la definición de la curva puede incorporar distintas propiedades físicas o estéticas como la acústica en un edificio, la configuración de cargas, la luminosidad, etc.

Principalmente, la manera en la que se relacionan ambas vías de describir una curva o superficie regular es de forma local, estableciendo parametrizaciones de (parte de) la curva o superficie bajo condiciones de regularidad y ante la ausencia de puntos singulares (Figura 1.1).

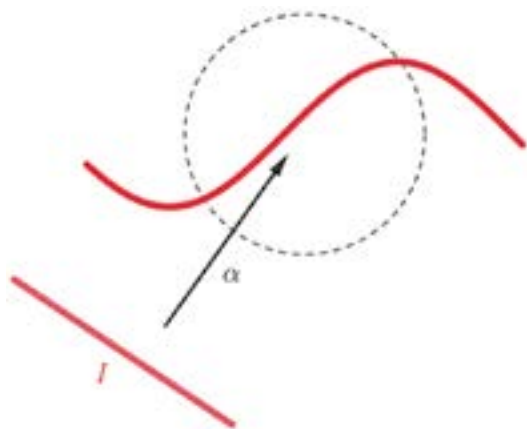


Figura 1.1. Idea de parametrización local de una curva plana. Elaboración propia.

La arquitectura y la ingeniería han hecho uso de curvas y superficies y las han combinado y desarrollado de manera habitual. Nuestro interés se centra en analizar obras y proyectos que aprovechan los conocimientos de geometría y expresar gráfica y analíticamente tales elementos como generadores abstractos del espacio. «El análisis de la forma arquitectónica comienza cuando se pretende alcanzar un conocimiento profundo de la misma, cuando se intenta comprender.» (Montes, 1992) Para conseguir este objetivo vamos a descomponer sus elementos y vamos a descubrir los principios y procesos que la generaron. Nos aproximaremos desde los puntos de vista de la geometría descriptiva y las matemáticas, pero no perderemos de vista su importancia formal, estructural y constructiva.

El estudio de las curvas y superficies utilizadas en edificación nos interesa en relación con la formación del diseñador contemporáneo, pues, entre otras, aporta dos ventajas que consideramos fundamentales: la primera y más evidente es que ofrece al estudiante la oportunidad de conocer obras y autores de gran relevancia, muchos de los cuales suelen quedar fuera de los programas habituales de Historia de la Arquitectura o Ingeniería. Pero sobre todo ofrece la oportunidad de analizar los procesos de ideación, poniendo al estudioso en la piel del arquitecto, ingeniero o diseñador que tiene que enfrentarse a nuevos retos y utiliza sus conocimientos de elementos abstractos para proponer soluciones innovadoras.

Los principales beneficios que aporta el estudio de las curvas y superficies de arquitectura e ingeniería se pueden resumir en: Conocer y manejar objetos de geometría compleja, desarrollar los mecanismos de la abstracción geométrica, como la visión espacial, la definición de los elementos y sus propiedades, las posibilidades de proyecto aportadas por operaciones, procesos, transformaciones, etc. Además, permite iniciarse en la investigación en materia de geometría arquitectónica. La metodología utilizada en el análisis de curvas y superficies se puede aplicar a diversos temas geométricos, profundizando en la historia de las matemáticas y el dibujo y aplicando esos procesos a proyectos propios. También se dirige a asimilar y utilizar la potencia de la parametrización. Las herramientas matemáticas enlazan este conocimiento con el diseño paramétrico y con el cálculo de estructuras (Lastra Sedano, 2015). Manejar el modelado 3D mediante programas CAD permite adquirir competencias de uso de herramientas digitales muy valoradas en el ámbito profesional.

1.1. Ideación, cálculo y construcción. Control de la forma

El estudio de la geometría en obras de gran complejidad nos hace cuestionarnos el porqué del esfuerzo de diseño, cálculo y construcción que conllevan. Pensemos en ejemplos como la cubierta de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, de Torroja, o la del restaurante Los Manantiales, de Candela, o la del Hall del Cemento, de Maillart: ¿se podrían haber resuelto con una forma paralelepípedica, con unas láminas planas que cerraran ese espacio? ¿Con una solución cuyo control de la forma hubiese sido muy ventajoso, aparentemente? La respuesta en principio no es sencilla, pero basta con fijar un parámetro tan cuantificable como la cantidad de estructura y la conclusión es radicalmente n°. Sería imposible obtener las mismas luces, utilizando el mismo volumen de hormigón con una losa plana (no pretensada). La forma hace la estructura, y por tanto la geometría es parte esencial de la solución.

Por otro lado, observemos el ejemplo del Panteón de Agripa. Podríamos pensar en sentido opuesto: ¿si en lugar de proponer una bóveda semiesférica se hubiese construido medio elipsoide, apuntado en sentido vertical? De esa manera los empujes laterales hubiesen sido menores y la estructura se hubiese beneficiado de la forma adoptada. Desde un punto de vista presentista es un ejercicio estimulante trasladar la experiencia de las grandes catedrales

góticas o de la cúpula de Santa María de las Flores, de Brunelleschi, o ejemplos más recientes, al gran modelo romano. Sin embargo, no podemos dejar de ver que esta propuesta carece de sentido, pues el proyecto del Panteón no se entiende sin la fuerza conceptual de la esfera. Luego la geometría también es la idea de partida, que condiciona el resto del desarrollo poniendo a prueba los conocimientos físicos y constructivos de cada época.

La geometría arquitectónica estudia formas rotundas, pero también atiende a las sutilezas, a diferencias mínimas que configuran el comportamiento de una estructura o transforman radicalmente un proyecto. Por ejemplo, la onda que rigidiza la cubierta de los hangares de Orly, de Eugène Freyssinet, produce una sensación de orden y aporta escala monumental al edificio. O los lunetos adosados a la cúpula del Mercado de Algeciras, de Eduardo Torroja, que refuerza la lámina superior, aporta una sensación de ligereza, exhibiendo unos bordes extraordinariamente finos. Las servidumbres físicas o de uso que el objeto construido debe cumplir y que por tanto limitan las posibilidades de que el proyectista dispone, no suponen un demérito, sino un acicate que nos permiten poner en valor los logros alcanzados.

Estructuralmente es necesario aproximar el proyecto a un modelo identificable para poder abordar los problemas de equilibrio, resistencia o estabilidad. Es un ejemplo llamativo el análisis de la arquitectura gótica. Los edificios góticos se mantienen en pie, aunque sus constructores no conocían las

modernas teorías de cálculo de estructuras. Sin embargo, demostraron un conocimiento empírico del funcionamiento de las bóvedas. Es sabido que en muchas ocasiones se hacían varios intentos antes de encontrar el perfil adecuado para un nervio o una superficie. El moderno concepto de *coeficiente de seguridad* se puede equiparar a las antiguas reglas geométricas. Un arco de fábrica sometido a su propio peso tiene un espesor mínimo para albergar la línea de empujes. Si esa línea de empujes se sale de la fábrica aparecen tracciones y con ellas el riesgo de colapso (Heyman, 1999).

No menos importante es considerar que el replanteo del proyecto sobre el terreno requiere no sólo conocimientos de construcción sino a veces también del desarrollo intuitivo de soluciones que se ajusten a cada situación (Figura 1.2). El manejo de cuerdas, miras, plomadas o niveles no son en absoluto equivalentes a escuadras o compases que maneja el diseñador en su tablero de dibujo (actualmente sustituidos por programas de CAD). Por ejemplo, el replanteo en obra de una circunferencia se realiza normalmente con el uso de una cuerda anclada en un punto como centro de la figura. La elipse, sin embargo, necesita fijar dos puntos y unirlos con una cuerda de longitud conocida y mayor que la separación entre ambos. Se traza la figura sin más que deslizar el marcador manteniendo tensa la cuerda. Esto es lo que se llama *método del jardinero* (Izquierdo Asensi, 1985). Hay que advertir que la mayor facilidad que ofrece aproximarse a la elipse por medio de arcos de circunferencia hace que mu-



Figura 1.2. Semana de la Arquitectura UAH. 2015. Taller de arquitectura textil y de carpintería. Replanteo a tiza sobre el suelo de curvas cónicas, elipse (izquierda) y parábola (derecha). Imagen de los autores.

chos elementos tengan como trazado ideal la elipse, pero en realidad sean óvalos. Se considera generalmente que la intención se antepone al resultado. Por ejemplo, la planta del Coliseo de Roma parece una elipse, pero en realidad es un óvalo de 188 metros de eje mayor y 156 metros de eje menor.

Proyectar con geometría compleja requiere el conocimiento de las superficies y de sus curvas. Construir supone además diseñar el proceso de replanteo, marcar las referencias y las proyecciones sobre un plano, que requieren disponer de una superficie firme y permanente (solera de hormigón o similar) y de elementos de control vertical, asociados a muros, cimbras, o referencias cercanas, tales como otros edificios o construcciones auxiliares.

1.2. Objeto y herramienta

Hace apenas unas décadas el dibujo asistido por ordenador nos daba la posibilidad de llegar a la configuración de los objetos geométricos tridimensionales sin pasar por el sistema de representación tradicional. Como si de la fabricación de una maqueta se tratase, con un proceso de realización y transformación cada vez más ágil y versátil. El dibujante contemporáneo puede modelar el objeto directamente en tres dimensiones (Figura 1.3) o más allá incluso, puede definir las condiciones que debe cumplir y manejar las variables de los parámetros implicados, para que un *software* de visualización lo represente.

Una vez elaborado el modelo, la salida a dos dimensiones (en papel o pantalla) se puede realizar

eligiendo cualquier sistema de representación tradicional o incluso grabando en vídeo movimientos o transformaciones prácticamente inverosímiles hasta hace muy poco tiempo. Elegir entre mostrar distintos elementos en proyecciones ortogonales al uso o expresar la percepción del observador por medio de una perspectiva cónica, deja de tener un sentido excluyente. El dibujante tiene ambos momentos en sus manos simultáneamente.

En cuanto al trabajo en equipo y la posibilidad de que un modelo sea producto de la coordinación de varios operadores o sirva a distintos actores, son actos que están cada vez más presentes en el proceso de construcción y esto también lo facilitan los procesos digitales.

Debemos añadir que, para este proceso —que podemos denominar *geometría informática* o *modelado 3D*—, la geometría descriptiva es un complemento necesario: es la gramática imprescindible que el dibujante necesita para construir análisis fundamentados. Es un requisito necesario haber estudiado previamente la teoría de los sistemas de representación y las operaciones básicas del control de la forma, tales como pertenencia, abatimiento, perpendicularidad, verdadera magnitud, etc.

El modelado 3D, integrado con el cálculo paramétrico, ha transformado los límites de los sistemas de representación y ha hecho que la geometría descriptiva, establecida hace más de doscientos años, haya pasado a ser considerada una disciplina en evolución. La revisión de la teoría de esta ciencia con estas nuevas herramientas abre un panorama innovador para la docencia y la investigación (De Miguel Sánchez, Lastra Sedano y Castaño Perea, 2013).

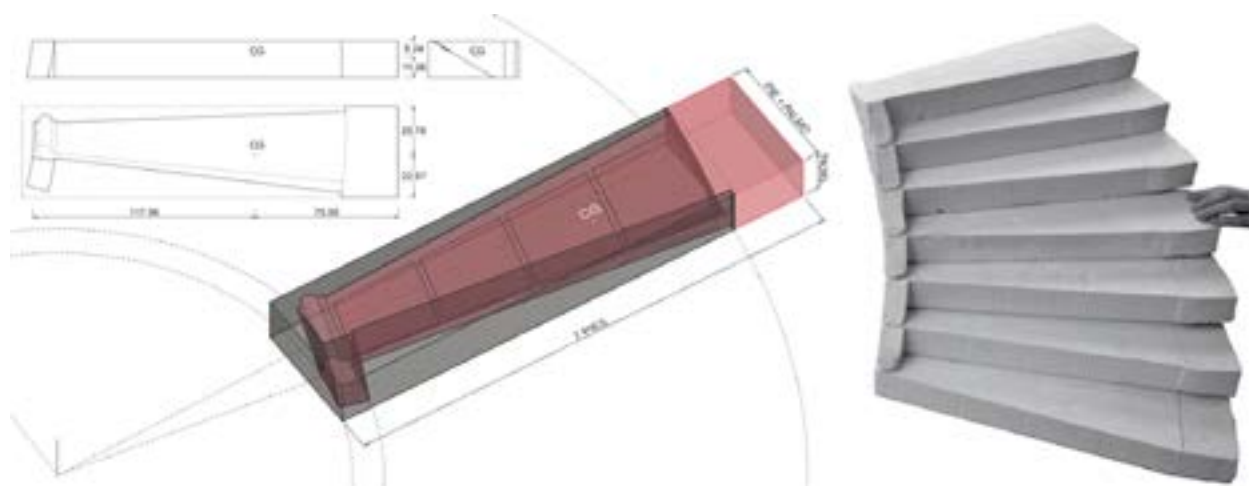


Figura 1.3. Peldaños de la escalera del Convento de Santo Domingo de Bonaval, Domingo de Andrade (ca. 1700). Ejemplo del uso de CAD y CNC para la realización de un modelo a escala en yeso (Cabo, Uriel y de Miguel, 2017).

1.3. Curvas cónicas

Los primeros textos de los que se tiene noticia sobre estas curvas son los cuatro libros de Euclides llamados *Secciones cónicas* (ca. 300 a. C.) desaparecidos. Este trabajo fue retomado y ampliado por Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.) que escribió *Cónicas*. Esta obra constaba de ocho libros. Los cuatro primeros se han conservado, los tres siguientes se transmitieron por su traducción al árabe y el octavo se ha perdido. El origen de los términos «elipse», «hipérbola» y «parábola» adoptados por Apolonio significan respectivamente deficiencia, exceso y equiparación.

Si rastreamos la presencia de las curvas cónicas en textos relacionados con la arquitectura, comprobamos que en los libros de Vitruvio la única cónica que se menciona es la circunferencia. En el tratado de Alberti, *De Pictura* (ca. 1435), se representa la elipse como proyección perspectiva de la circunferencia. En el de Piero de la Francesca, *De Prospectiva Pingendi* (ca. 1474), podemos comprobar que la definición de la elipse es una aproximación por puntos. Durero, en su Libro I (1525) sí

explica la forma de alargar un semicírculo y convertirlo en media elipse, por división en partes del rectángulo circunscrito. Es en el libro primero del tratado de Serlio *Siete Libros de Arquitectura* (1537), en el que aparece el método de transformación de la circunferencia en elipse.

Una de las formas de definir una cónica es como curva algebraica, siendo los puntos del plano euclídeo que verifican un polinomio de segundo grado. Son conocidas como *cónicas* porque se producen por distintas intersecciones de un plano con un cono (Figura 1.4). Según el ángulo de corte, tendremos la hipérbola, la parábola, la elipse y la circunferencia (en realidad, un caso particular de la elipse). Otro punto de vista para su generación es también como lugar geométrico, en el que no ahondaremos. Las cónicas responden a una ecuación de segundo grado de la forma siguiente:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Las transformaciones ortogonales en el plano euclídeo permiten determinar una clasificación de estas a partir de su representación matricial, me-

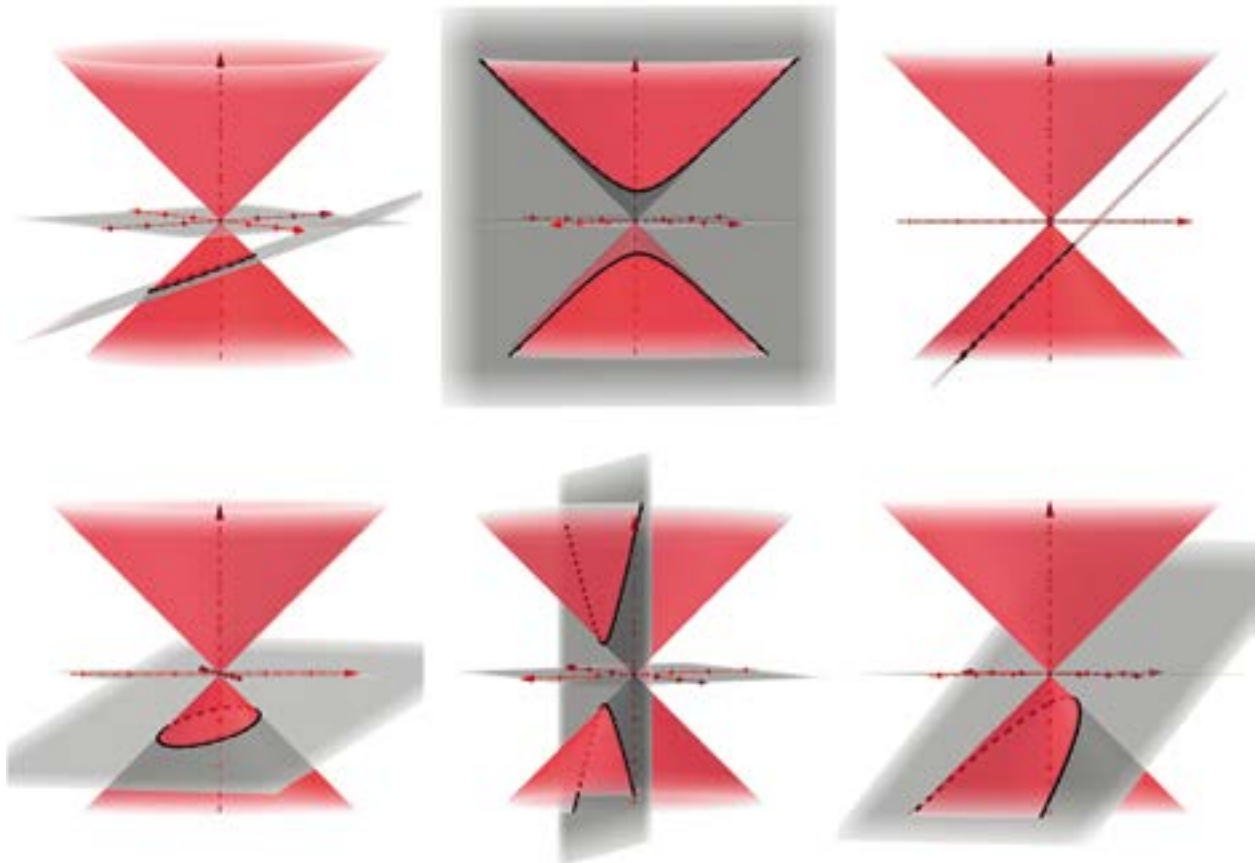


Figura 1.4. Cónicas como secciones de un cono con un plano. Cónicas no degeneradas. Tanto en fila superior como inferior y de izquierda a derecha: elipse, hipérbola, parábola. Elaboración propia.

diente elementos invariantes mediante movimientos rígidos. Así, si bien usualmente se asocia al concepto de cónica las figuras de elipse, hipérbola o parábola, desde este punto de vista aparecen otras cónicas como la elipse imaginaria, dotada de dicha notación por su semejanza en cuanto a la formulación respecto a la elipse real, pero sin contener puntos reales. También serán cónicas, en este caso reducibles ya que el polinomio de segundo grado que define la cónica

puede factorizarse, pares de rectas bien secantes, bien paralelas (reales o imaginarias) o rectas coincidentes (Figura 1.5). En el caso de rectas imaginarias paralelas no se alcanza a ver ningún punto, mientras que para las rectas secantes imaginarias, a la vista la cónica quedará reducida a un único punto. Para un mayor detalle al respecto, el lector interesado puede consultar los textos (Lastra Sedano, 2021), Cap. 1.4 y (Burgos Román, 2006), entre otros.

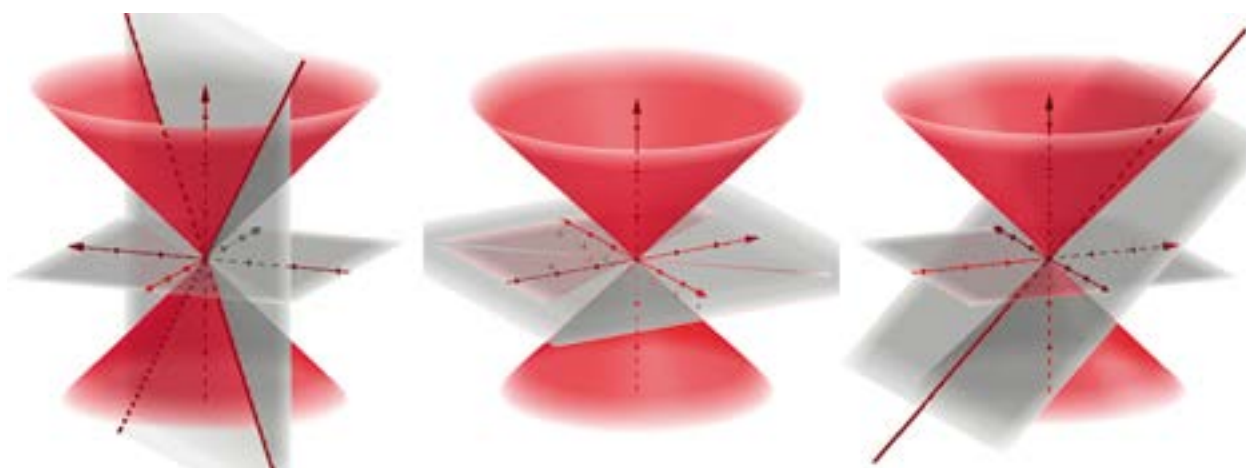


Figura 1.5. Cónicas como secciones de un cono con un plano. Cónicas degeneradas. De izquierda a derecha: par de rectas secantes, par de rectas secantes imaginarias, recta doble. Elaboración propia.

Las secciones cónicas poseen unas propiedades interesantes. En la sección de la elipse de la Figura 1.6 se aprecia cómo los focos de esta son los puntos de tangencia de las esferas inscritas de centro O y O' . La distancia FA es igual a $F'A'$ y coincide con BA . Análogamente FA' es igual a $F'A$ y coincide con AB' , por tanto, el eje mayor de la elipse AA'

es igual al segmento de generatriz BB' . En la sección de la parábola, el foco de esta es también el punto de tangencia del plano con la esfera inscrita y la directriz de la parábola está en el plano de contacto de esfera y cono. En el caso de la hipérbola, los focos también son los puntos de tangencia de las esferas inscritas.

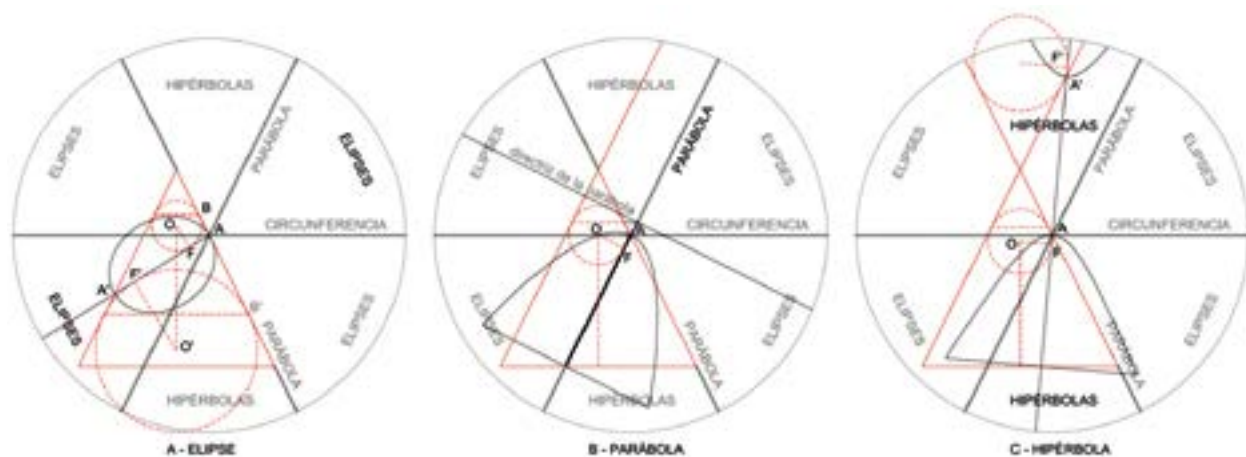


Figura 1.6. Esquema de secciones cónicas. Elaboración propia.

Circunferencia.¹ Se define por la constante radio o distancia desde cualquiera de sus puntos a un punto único o centro. Una cónica propia es una elipse si su excentricidad es menor que 1: $e < 1$. Cuando $e = 0$ la elipse es una circunferencia. La excentricidad en una cónica no degenerada queda definida por el valor constante determinado por el cociente entre las distancias de uno de sus puntos a los focos y la distancia de dicho punto a las directrices. Este elemento puede describirse en términos de la distancia entre focos de una elipse, de forma que para una elipse la excentricidad mide lo que ésta se aleja de la circularidad. En la circunferencia los dos focos se confunden y son a su vez el centro de la cónica.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Claramente, una circunferencia resulta ser un caso particular de una elipse para la que los ejes mayor y menor coinciden. Desde el punto de vista de su clasificación, mediante el uso de invariantes matriciales, una circunferencia viene asociada a una matriz reducida para la cual los coeficientes en los términos cuadráticos coinciden, siendo $-r^2$ el valor del término independiente.



Figura 1.7. Castro de Baroña, siglo I a. C., A Coruña. Imagen propia.

Podemos afirmar que la circunferencia es la curva fundamental en la historia de la arquitectura. Es símbolo de plenitud y perfección. Las estructuras de planta circular son frecuentes en los restos de construcciones prehistóricas (Figura 1.7), desde monumentos funerarios como los tholos micénicos o en estructuras megalíticas, como la de Stonehenge

(Figura 1.8), pero también forman parte de refugios y viviendas primitivos, como las de los castros celtas. La circunferencia también aparece en el trazado de arcos y bóvedas de todo tipo.

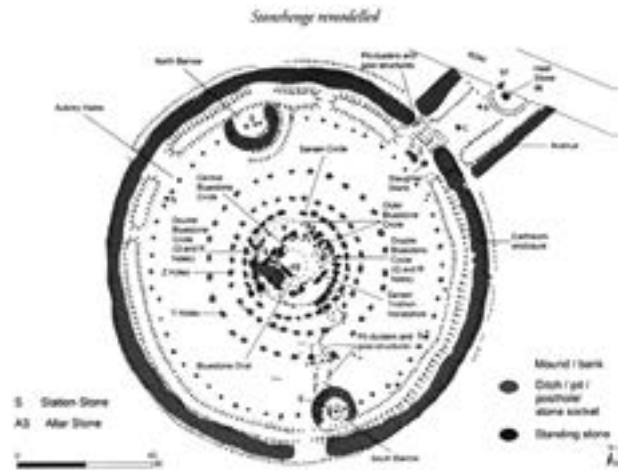


Figura 1.8. Planta de Stonehenge, ca. 3000 a. C. Condado de Wiltshire, Inglaterra (Darvill, 2012).

Elipse. La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante e igual a la longitud del eje mayor.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Desde el punto de vista matricial, una elipse puede reducir su ecuación tras movimientos rígidos hasta quedar representada por una matriz diagonal en la que las longitudes de los ejes vienen descritos en términos de los coeficientes de los términos cuadráticos. El sistema de coordenadas en el que una elipse tiene esta ecuación viene descrito por el centro de coordenadas definido por el centro de la elipse, y siendo los ejes de coordenadas rectas de vector de dirección dado por autovectores asociados a la matriz de términos cuadráticos de la cónica. Al ser una matriz simétrica, esta es diagonalizable, y por el hecho de ser una elipse, los autovalores son ambos de mismo signo, y dando lugar a direcciones ortogonales.

La *primera ley de Kepler* establece que los planetas describen órbitas elípticas, con el sol situado en uno de sus focos. Dicha ley también se aplica a otros pequeños cuerpos del sistema solar llamados *planetas menores* o *asteroides*. Podemos encontrar la elipse en ejemplos importantes de la arquitectura histórica. Pensemos en el pavimento elíptico de la plaza del Campidoglio de Miguel Ángel (Figura 1.9), en Roma, que recurre a esta figura

1. Todas las ecuaciones que se incluyen son obtenidas tras realizar una transformación rígida (traslación y giro) en el plano.



Figura 1.9. Campidoglio, Roma, Miguel Ángel (1538).
Fuente: Grabado Étienne Dupérac (ca. 1560).

para convertir un espacio público de planta trapezoidal en una plaza dinámica y envolvente. En la plaza de San Pedro del Vaticano construida entre 1656-1667, Bernini marca los focos geométricos con fuentes. Es interesante cómo esta figura puede atrapar el espacio en torno suyo. También se encuentra en las bóvedas de arista, que presentan dos elipses en las diagonales, al ser cortes oblicuos a los ejes de los cilindros. Muchos espacios barrocos se han visto impregnados del dinamismo que genera la elipse tanto en edificios como en plazas o jardines. Por otro lado, hay que advertir que algunas formas que parecen elipses son en realidad óvalos, curvas que están compuestas por arcos de circunferencia. Estas figuras han tenido una gran aplicación en la arquitectura histórica por su facilidad para adaptarse a cualquier proporción (López Mozo, 2011).

Parábola. La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (el foco) y una recta dada (la directriz) (Figura 1.10).

$$y^2 = 2px$$

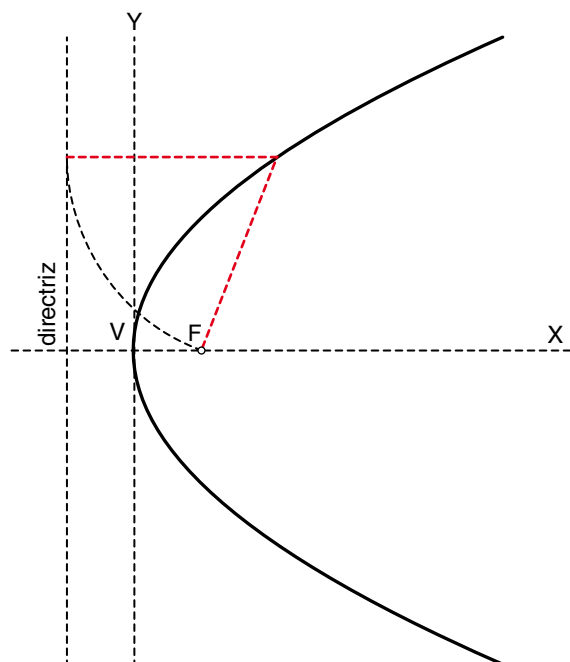


Figura 1.10. Parábola. Las distancias desde un punto de la curva al foco y a la directriz son iguales. Elaboración propia.

La caracterización de una parábola en términos de su representación matricial se basa en tener su determinante no nulo (al ser una cónica no degenerada), pero además ser nulo uno de los autovalores asociados a la matriz de términos cuadráticos. El otro autovalor se encuentra asociado a la dirección del eje de simetría de la parábola a través del espacio de autovectores asociados.

La parábola es la forma propia del puente suspendido (Figura 1.11 y Figura 1.12). A diferencia de la catenaria, que se cuelga de dos puntos y soporta su propio peso, la parábola se acomoda mejor a la carga distribuida uniformemente en horizontal. La diferencia entre ambas es pequeña visualmente, pero tiene una importancia notable en materias estructural y geométrica.

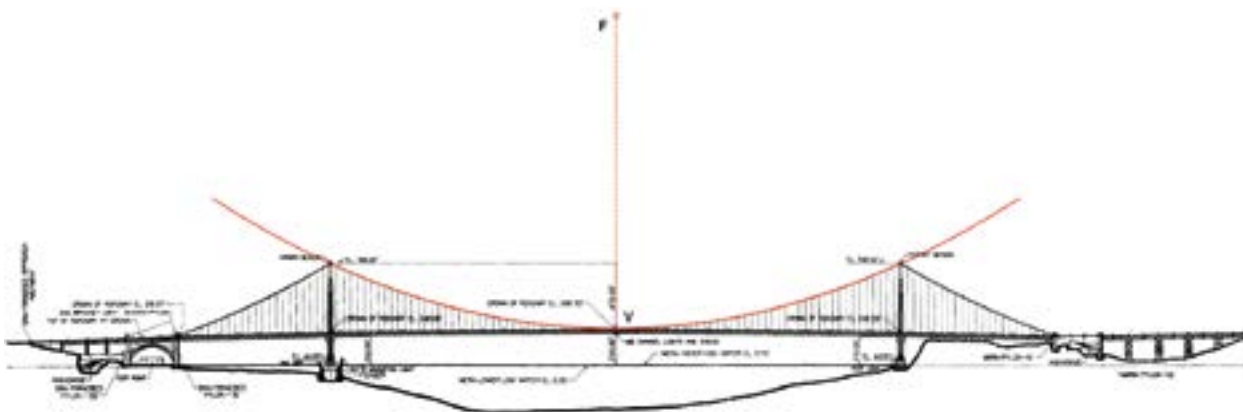


Figura 1.11. Joseph Strauss, alzado del puente Golden Gate de San Francisco, 1937.

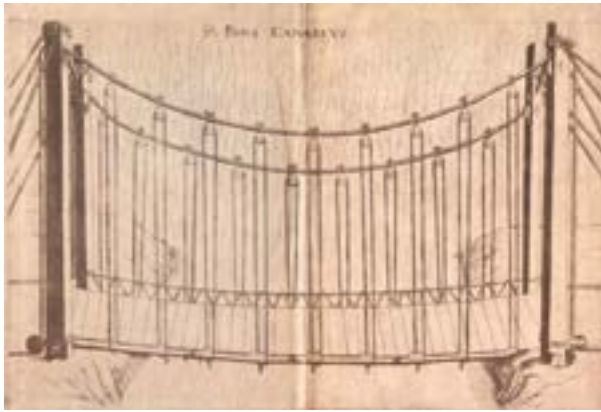


Figura 1.12. Puente colgante por Fausto Verazio, ca. 1600. Es considerado el primer dibujo de un puente colgante.

Hipérbola. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante (Figura 1.13). La distancia entre los vértices también coincide con esa diferencia. Otra propiedad importante es que la intersección entre tangente a un vértice y una asíntota nos da un punto cuya distancia al centro es igual a la que existen entre centro y foco. Si bien la excentricidad de una circunferencia es nula, y en una elipse se encuentra entre 0 y 1, la excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

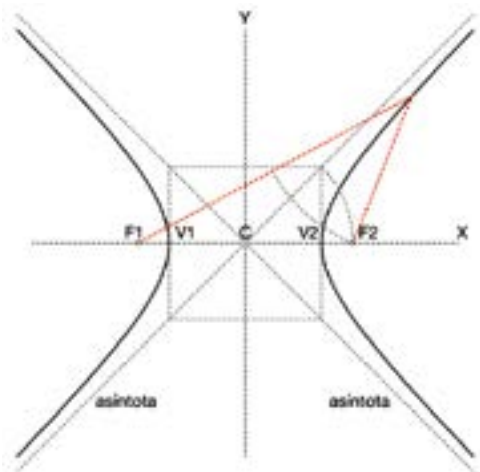


Figura 1.13. Hipérbola equilátera. La diferencia entre las distancias desde un punto de la curva a cada foco es una constante. Elaboración propia.

Matricialmente, la hipérbola es exactamente equivalente a una elipse, salvo por el hecho de que los autovalores asociados a la matriz de términos

cuadráticos tienen distinto signo, de forma que las transformaciones rígidas (giros y traslaciones) permiten escribirla en la forma reducida que se acaba de exponer. De nuevo, los ejes quedarán determinados por las direcciones de autovectores asociados a dicha matriz de términos cuadráticos.

Esta curva se asocia a la superficie hiperboloi-de hiperbólico, y es una forma habitual en la sección de construcciones como depósitos, torres de control, faros, etc., por su gran estabilidad (Figura 1.14). Autores como Vladimir Shújov, Eduardo Torroja, Oscar Niemeyer, etc., han utilizado esta curva para diseñar algunos de sus proyectos.

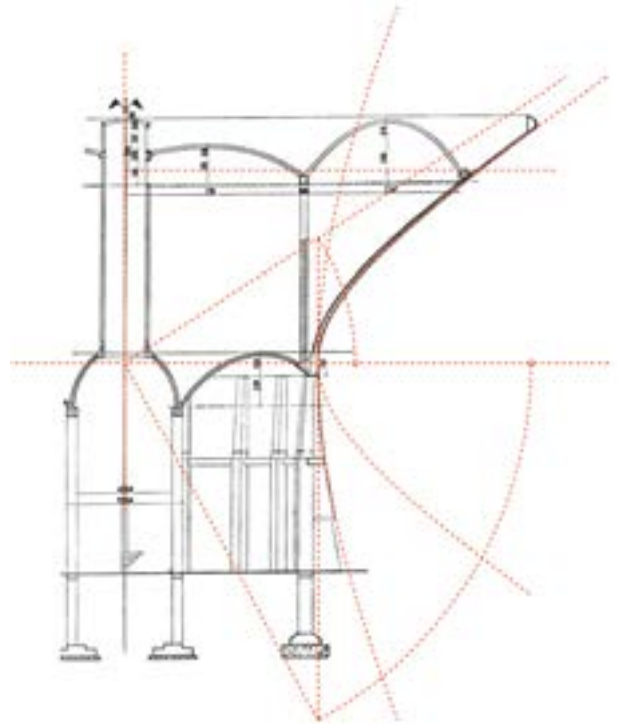


Figura 1.14. Sección de la Cuba de Fedala. Eduardo Torroja. Elaboración propia.

1.4. Otras curvas planas en arquitectura

Catenaria. De aspecto muy parecido a la parábola, es la forma que adopta una cadena, sujeta por sus extremos, por ello los arcos catenarios son los que mejor se ajustan a las estructuras sometidas principalmente a peso propio (Figura 1.15). Cuando revolucionan estas entidades generan catenoides, superficies que también tienen cierta relevancia en arquitectura. La Sagrada Familia de Gaudí, algunas cubiertas del ingeniero Heinz Isler, etc.

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

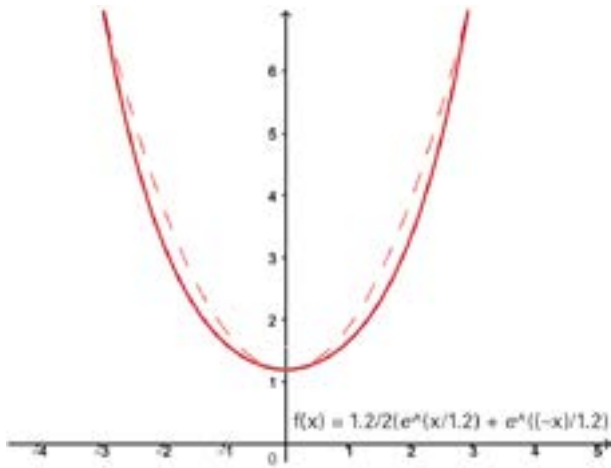


Figura 1.15. Catenaria. Curva asimilada a una cadena colgada por sus extremos. Se superpone una parábola (línea discontinua) para comparar las formas. Imagen de los autores.

Cicloide. Es una curva que describe el movimiento de un punto que pertenece a una circunferencia cuando esta rueda sobre otra curva. Es bien conoci-

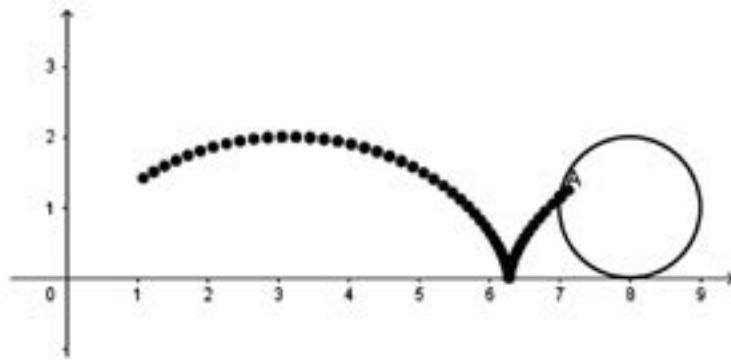


Figura 1.16. Izquierda: curva cicloide $r = 1$. Descrita por un punto de una circunferencia al rodar. Imagen de los autores. Derecha: Museo Kimbell, Fort Worth, Texas, Louis Kahn, 1972. Las cubiertas siguen la forma de la curva cicloide. De Carol M. Highsmith. Dominio público, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31402682>.

La manera de alcanzar la parametrización anterior de una cicloide es sencilla, conociendo las reglas a partir de las que se construye. Así, si suponemos que la posición inicial de la circunferencia que rueda viene dada por la ecuación de una circunferencia centrada en el punto $(0, r)$, de radio r y hacemos mover el punto fijo en la circunferencia en el sentido horario dentro de esta durante unidades, tendremos que la longitud de arco vendrá dada por $r\alpha$, de donde $\alpha = s/r$. Por tanto, si el ángulo inicial del punto es $-\pi/2$, tras un tiempo será de $-\frac{\pi}{2} - s$, por lo que la posición del punto será:

$$\left[s + r \cos\left(-\frac{s}{r} - \frac{\pi}{2}\right), r \sin\left(-\frac{s}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

do el caso de la cubierta del Museo de Arte Kimbell, de Louis Kahn, que está formada por una serie de cilindros cuya directriz es esta curva (Figura 1.16).

$$x = r \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2}$$

Una parametrización de una cicloide viene dada por

$$[x(t), y(t)] = [r[t - \sin(t)], r[1 - \cos(t)]]$$

Es importante observar que una cicloide no es una curva regular en su totalidad, ya que posee puntos singulares producidos al completar una vuelta la circunferencia que gira, cuando el punto fijado toca el suelo. En este momento, la curva no admite vector velocidad no nulo, por lo que no se puede definir una recta tangente de forma adecuada. Obsérvese de la parametrización que el vector derivada se anula para los múltiplos enteros de $2\pi r$.

Las fórmulas trigonométricas usuales permiten concluir la parametrización dada de la cicloide.

Lemniscata. También conocida como *lemniscata de Bernoulli*, aunque mucho menos frecuente esta curva aparece en el diseño de la Costilla Laminar de la Fundación Eduardo Torroja, en Madrid (Figura 1.17).

$$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)$$

Vista como lugar geométrico, una lemniscata se obtiene disponiendo aquellos puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos, los focos de la lemniscata, de manera constante. También, una

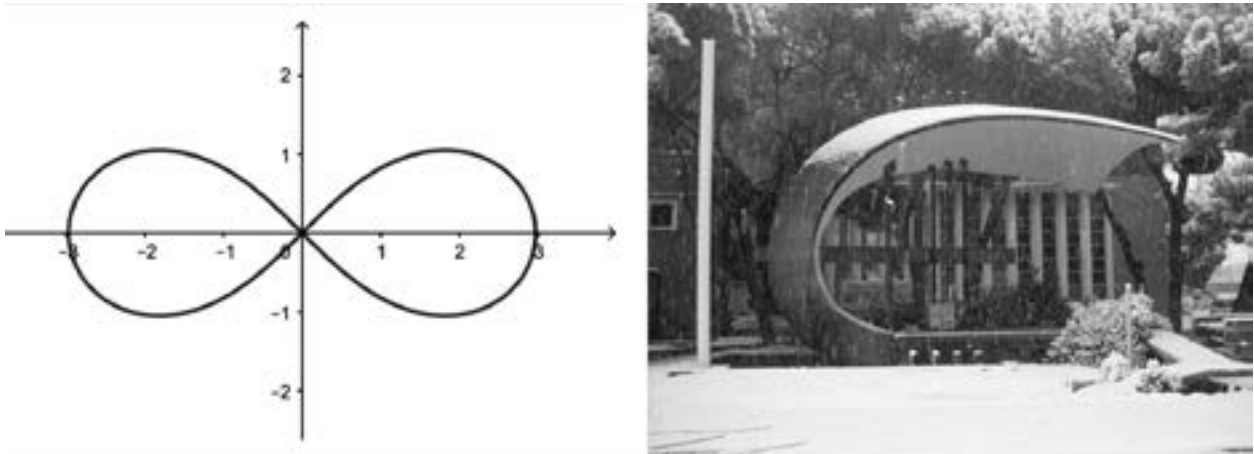


Figura 1.17. Izquierda: curva lemniscata. Imagen de los autores. Derecha: capilla del Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, 1969 (Echevarría, Garnica y Gutiérrez, 2014.)

lemniscata puede construirse siguiendo una construcción de similar naturaleza al de una cicloide. Así, una lemniscata puede describirse viendo la trayectoria que dibuja el centro de una hipérbola que gira alrededor de otra hipérbola exactamente igual. También puede describirse a partir de ciertas secciones en algunos toros particulares.

Una parametrización de la curva viene dada por:

$$[x(t), y(t)] = \left[\frac{d \cos(t) \sqrt{2}}{\sin(t)^2 + 1}, \frac{d \cos(t) \sin(t) \sqrt{2}}{\sin(t)^2 + 1} \right]$$

para cualquier valor real del parámetro.

Espiral. Destaca la espiral logarítmica, que suele aparecer asociada a la perspectiva (Figura 1.18). Concretamente, la espiral logarítmica surge de la proyección ortogonal de una hélice circular desde una proyección ortogonal a su eje. Una parametrización de este tipo de curvas viene definida por:

$$[x(t), y(t)] = [a \exp(bt) \cos(t), a \exp(bt) \sin(t)]$$

para cualquier valor del parámetro. Obsérvese que el módulo del valor de determina la escala de la espiral, mientras que su signo está asociado a su sentido de giro. Por otro lado, el parámetro b mide la separación entre dos giros consecutivos de la espiral.



Figura 1.18. Espiral logarítmica. La triple escalera de caracol del convento de Santo Domingo de Bonaval, Santiago de Compostela. Imagen de los autores.

1.5. Curvas alabeadas

Hélice. Puede ser hélice cilíndrica, cónica esférica, etc. Su presencia en la historia de la arquitectura se asocia al trazado de escaleras de caracol, formando superficies helicoidales, aunque también es un motivo decorativo, como en la Columna de Trajano. Del mismo modo se puede encontrar en forma de curva alabeada alrededor de distintas

superficies, como en el caso del minarete de la Mezquita de Samarra, que describe una hélice cónica y en la cúpula de una sola hilada de la escalera del monasterio de Santa Catalina en Talavera de la Reina (Toledo) que es una hélice esférica (Figura 1.19).

$$x = \frac{Ra^2}{R^2a^2 + 1}$$



Figura 1.19. Hélices sobre cilindro, cono y esfera. Izquierda: Columna de Trajano, 113 d. C. (imagen de Olivier Giboulot, licencia Unsplash, <https://unsplash.com/es/fotos/FpZ0spMtetc>). Centro: minarete de la Mezquita de Samarra, 851 d. C. (imagen de Safa Daneshvar, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:001124-MalwiyaMosque-Samerra-IMG_7824-2.jpg, Wikimedia Commons). Derecha: Monasterio de Santa Catalina, Toledo, siglo xvi. Imagen de los autores.

Las hélices son, sin duda, la curva alabeada con más presencia en arquitectura. Por lo general, una hélice puede describirse paramétricamente por la parametrización:

$$[x(t), y(t), z(t)] = [r(t) \cos(t), s(t) \sin(t), h(t)]$$

donde $r(t)$, $s(t)$ son funciones que describen en planta la figura que va describiendo la hélice, y donde $h(t)$ mide la altura a la que se dibuja esta. Como puede verse a partir de la parametrización presentada, una hélice tiene una relación muy estrecha con las coordenadas cilíndricas. En el caso de hélices cilíndricas, $r(t) = s(t)$ son constantes iguales al valor del radio de la circunferencia que se describe en planta, mientras que $h(t)$ es la función $h(t) = t$. Cuando la hélice tiene una base elíptica, $r(t)$ y $s(t)$ siguen siendo constantes, y su valor coincide con la medida de los semiejes de la elipse que se dibuja. Al variar $h(t)$ se modifican los elementos asociados a la altura a la que se dibuja la hélice. Así, una función $h(t)$ con derivada positiva y creciente dibujará una

hélice con velocidad de crecimiento en altura cada vez mayor.

Cuárticas. Las intersecciones entre superficies a menudo producen curvas de cuarto grado. Tal es el caso de los bordes de los lunetos que completan las bóvedas (Figura 1.20). En general, si se interseccionan dos superficies, como las cuádricas (y no cum-



Figura 1.20. Modelo teórico de bóveda de cañón con lunetos. Las curvas intersección entre cilindros de distinto radio son curvas cuárticas. Por los autores.

plen la condición de ser bitangentes, en cuyo caso la intersección se compone de dos cónicas) las entidades resultantes van a ser curvas alabeadas.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

1.6. Superficies cuádricas y formas libres

Las cuádricas son la generalización, al espacio, de las cónicas. Entre ellas tenemos las cuádricas de revolución, como el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de revolución y el paraboloide de revolución o elíptico. También está el paraboloide hiperbólico que es radiada, como el hiperboloide de una hoja, el cono y el cilindro, pero a diferencia de estas, no es de revolución. De modo que, dentro de las cuádricas, como en otras superficies, la clasificación de superficies se presta a diferentes agrupaciones, bien por su generación, ejes, directrices, planos o conos directores, etc.

José María Ruiz Aizpiri (1972) subrayaba que «las formas parabólico-hiperbólicas han experimentado un desarrollo espectacular en el campo laminar, pero en general, el trazado de superficies regladas no ha agotado aún sus grandes posibilidades geométricas», y explica que la falta de interés hacia el estudio de la geometría se debe a que no se ha enfocado desde un punto de vista plástico. Tradicionalmente se ha puesto la atención en la resolución de problemas de formas con pocos grados de libertad; en cambio, se descuida el estudio de superficies cuyas posibilidades compositivas están muy lejos de agotarse.

Especialmente interesantes por sus cualidades estructurales son las superficies de doble curvatura y entre ellas las de segundo grado (cuádricas) por ser sus ecuaciones más sencillas y más fácil su encofrado. Las dos superficies que cumplen las condiciones de ser alabeadas y de segundo grado son paraboloides e hiperboloides y por ello están entre las más empleadas en las cáscaras de hormigón.

El hiperboloide contiene a las tres clases de cónicas, elipse, parábola e hipérbola, mientras el paraboloide solo contiene dos cónicas, parábolas e hipérbolas. Para Aizpiri «son tan sumamente variadas las disposiciones que se pueden obtener con las superficies de segundo grado, que siempre es posible obtener formas originales» (Ruiz Aizpiri, 1972).

Limitaciones como la estructural o la constructiva también están vinculadas a la geometría. Frente a las llamadas *formas libres* supuestamente liberadas de la geometría, aclara Aizpiri (1972) que esta disciplina no impone limitación alguna, sino que in-

vestiga las propiedades de la forma y nos descubre las posibilidades que una forma va a alcanzar cuando está destinada a ser construida.

De forma análoga a las cónicas, las cuádricas resultan ser la manifestación de los ceros de polinomios de segundo grado, en este caso, de polinomios en tres variables. Por tanto, todas las cuádricas pueden representarse a través de una matriz, que las identifica unívocamente, y que permite calcular sus elementos más característicos de forma rápida y organizada. La teoría asociada a las transformaciones ortogonales en el espacio permite determinar un sistema de referencia en el espacio que hace que la cuádrica tenga una expresión lo más amigable posible. Esta expresión es la que se mostrará en cada uno de los casos subsiguientes, aunque podría tener una ecuación mucho más complicada, en un sistema de referencia cualquiera.

El teorema espectral permitirá reescribir la matriz asociada a los términos cuadráticos de la matriz de la cuádrica en forma diagonal (al ser una matriz simétrica, y por tanto diagonalizable en el cuerpo de los reales), por lo que el estudio de clasificación de cuádricas se reduce al de elementos invariantes por transformaciones rígidas en el espacio en superficies definidas implícitamente en la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

para valores reales $a, \dots, g$. Los invariantes se encuentran en la invariabilidad del polinomio característico asociado a la matriz de la cuádrica, y en particular a sus coeficientes (determinante, signatura de ciertas submatrices, rangos, etc.). Aunque solo se hará un estudio de las cuádricas presentes en el contexto arquitectónico resulta interesante señalar que, además de elipsoides, hiperboloides y paraboloides, entre este tipo de superficies se encuentran también conos, cilindros y combinaciones de planos en distintas posiciones.

Elipsoide. Algunas cúpulas elípticas presentan una planta circular y su sección es una elipse. Un ejemplo es la cúpula del Reichstag, de Norman Foster (Figura 1.21, Figura 1.22) o la bóveda del Palacio Güell, de Gaudí (Figura 1.23). Otras cúpulas tienen una planta elíptica, pero en sección pueden ser semicirculares, en cuyo caso será también de revolución. Muchas cúpulas barrocas siguen ese esquema. En esta superficie es importante tener en cuenta que los cortes a distintas alturas dan elipses concéntricas, pero estas no son curvas paralelas, lo cual complica mucho el trazado de este tipo de bóvedas.



Figura 1.21. Izquierda: Elipsoide. Derecha: Cúpula del Reichstag, Norman Foster, 1999 (imagen de Christian Lue, <https://unsplash.com/es/fotos/seWsl9kjkW8>, Licencia Unsplash). Es una estructura metálica cuyos meridianos tienen forma elíptica, que se unen en un anillo en la parte superior.

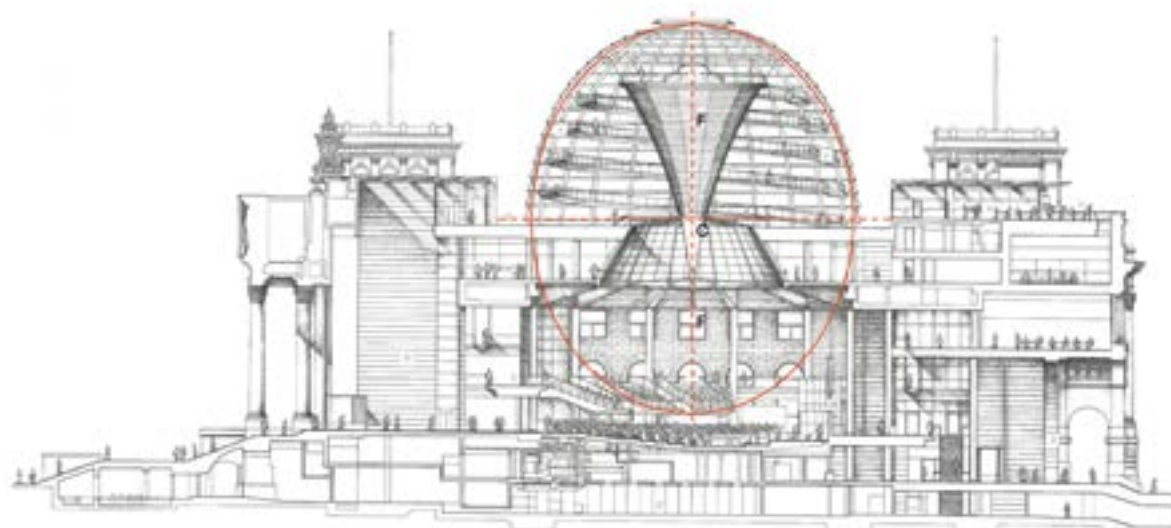


Figura 1.22. Reichstag, Norman Foster, 1999. Elipse dibujada por los autores sobre sección (Davey, 1999).

La formulación reducida que presentamos se da en el sistema ortonormal para el que el centro de coordenadas se sitúa en el centro del elipsoide, y siendo los ejes coordenados determinados por las rectas por el centro y de dirección los autovectores de la matriz asociada a los términos cuadráticos de la matriz asociada. En ella, es sencillo comprobar que las proyecciones sobre los planos coordenados de la cuádrica son siempre elipses, sin más que anular los valores de cada una de las variables. De esta forma, tenemos también garantizada la medida de cada uno de los semiejes.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esfera. Es una entidad definida por una constante distancia desde un punto central a toda la superficie. Esto caracteriza los espacios por su centralidad, por generar un polo que domina toda la composición. El caso paradigmático es el Panteón de Agripa, en Roma, que alberga una esfera en su interior, tangente al suelo y cuya mitad superior forma la cúpula. También existen muchos otros casos de superficies esféricas y vaídas que utilizan esta entidad. En la arquitectura renacentista muchas cúpulas en España siguieron el camino marcado por la del Escorial, mostrando la semiesfera tanto al interior como al exterior (López-Mozo, 2013).

En la arquitectura moderna encontramos casos como el Primer Goetheanum, la cúpula de Dischin-

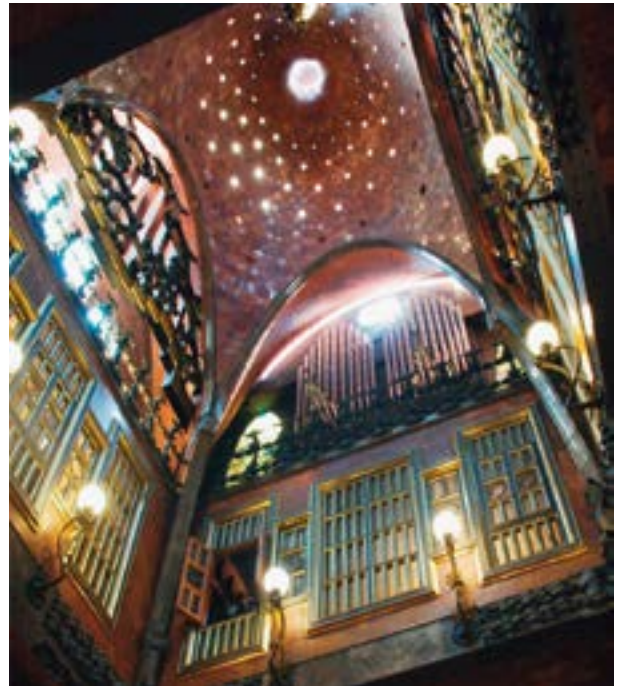
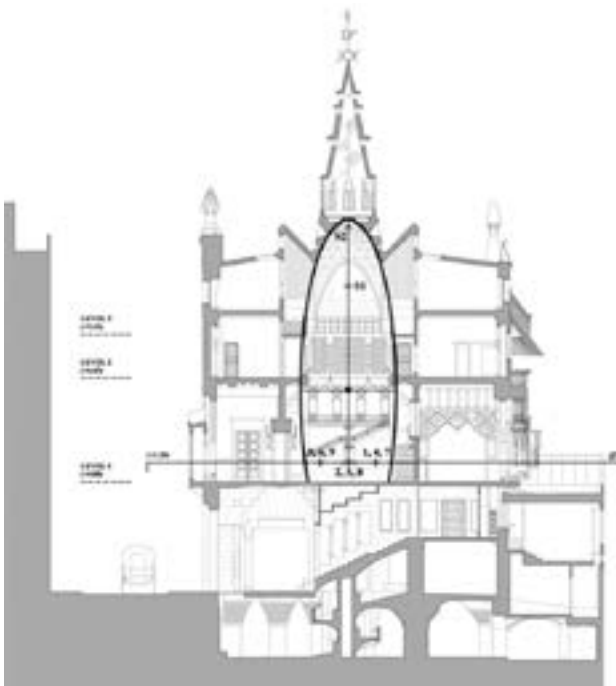


Figura 1.23. Palacio Güell, Antonio Gaudí, 1885. El salón central dedicado a la música presenta una cúpula de forma elíptica (González, G., Samper y Herrera, 2021).

ger para el Planetario de Jena, el mercado de Algeciras, de Eduardo Torroja o el Palacio de los Deportes de Candela. También existen edificios que utilizan triángulos esféricos, como el Auditorio Kresge, de

Eero Saarinen o la Ópera de Sydney, de Jorn Utzon (Figura 1.24, Figura 1. 25).

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$



Figura 1.24. Izquierda: Primer Goetheanum, Rudolf Steiner, 1914. Fotografía de la cimbra. La cubierta muestra dos esferas en madera, cuya intersección es una circunferencia (Kiuntzli et al., 2020). Centro: Planetario Zeiss de Jena, Franz Dischinger, 1926. Fotografía de la armadura de la lámina de hormigón. La disposición de las barras forma una cúpula geodésica (Hines, 2004). Derecha: Mercado de Algeciras, Eduardo Torroja, 1933. Cubierta formada por un casquete esférico y lunetos cilíndricos de eje horizontal (Torroja, E., 1962c).



Figura 1.25. Izquierda: Palacio de los Deportes, Félix Candela, 1968. De una superficie esférica se toman meridianos en dos direcciones que se cierran con hiperboloides hiperbólicos (Candela Outeriño, Peyri Macía y Castañeda Tamborrell, 1968). Derecha: Comparativa de la evolución de la forma de las cubiertas de la Ópera de Sydney, 1973 (Rey-Rey, 2014). Las cubiertas están concebidas como triángulos esféricos, aunque no funcionan como una cáscara, sino como la suma de nervios en abanico.

Una esfera, como caso particular de un elipsoide para el que sus ejes comparten medida, no es distinguible de otro elipsoide desde el punto de vista de la clasificación, siendo el determinante de la matriz de la cuádrica negativo, y todos los autovalores de la matriz asociada a los términos cuadráticos todos del mismo signo.

Cono. Es una superficie reglada, cuádrica y desarrollable. En la arquitectura tradicional se encuentra en troneras, lunetos, capialzados, algunas cubiertas de torreones y cubiertas de bóvedas, como la hoja

exterior del Panteón de Roma en las que el casquete superior se acerca a la forma de la hoja interior y según se aproxima a los bordes del anillo la cubierta se convierte en un cono recto. O en el trazado de las hiladas redondas de las bóvedas de cantería. El carácter de superficie desarrollable permite el uso de láminas semirrígidas para dar forma a estructuras como el pabellón Caterpillar, de Roberto Narváez y Andrés Martín-Pastor (Figura 1.26).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Figura 1.26. Izquierda: auditorio de la Escuela Nacional de Ciencias Químicas, Ciudad Universitaria, México, Félix Candela, 1952 (Faber, 1970). Derecha: pabellón Caterpillar, Roberto Narváez y Andrés Martín-Pastor, 2014. Conos de tablero de fibra de madera. Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Edificación. Universidad de Sevilla (Martín-Pastor, García-Alvarado, 2019).

Esta cuádrica con un punto singular en el vértice no puede clasificarse como superficie regular, pero sin embargo goza de buenas propiedades en cuanto a su sencillez en la parametrización. Así, dentro de las superficies regladas, queda parametrizada a partir de una directriz dada por una circunferencia y generatrices todas pasando por el vértice, que se sitúa en la recta perpendicular al plano de la circunferencia por su centro. La característica de estas cuádricas corresponde a la nulidad del determinante de la matriz asociada a la cuádrica, mientras que la matriz de términos cuadráticos admite todos sus autovalores no nulos y con algún cambio de signo que determina el signo negativo acompañando a la tercera variable en la formulación anterior, que es la de la forma simplificada de la cuádrica. Por similitud a esta, el cambio de signo en este término determina lo que se conoce como cono imaginario. A la vista de su ecuación implícita, los conos imaginarios se reducen a un único punto: el vértice.

Cilindro. Está presente en toda clase de obras, principalmente en forma de arco, nombre que recibe tanto la curva como la estructura asociada. El arco revoluciona la edificación, permitiendo cubrir luces importantes a base de combinar elementos de mediano o pequeño tamaño, que trabajan a compresión y se comportan muy bien frente a fuego. Se encuentra en un gran número de obras, tales como: el Hall del Cemento, Orly, el Frontón de Recoletos, la fábrica de Gossau de Hossdorf, etc. (Figura 1.27, Figura 1.28).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La particularidad de este tipo de cuádricas se encuentra en que las generatrices siguen una misma dirección, siendo su directriz dada por una elipse, hipérbola o parábola dibujadas en un plano que no contiene al vértice. Aunque existen otras familias de

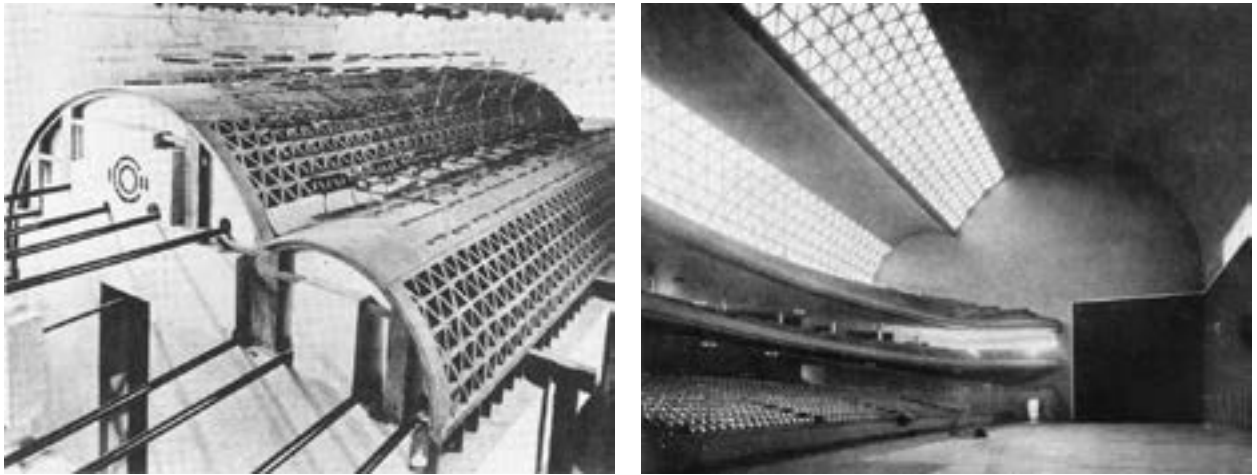


Figura 1.27. Izquierda: modelo a escala del Frontón de Recoletos, Eduardo Torroja, 1935. El trabajo teórico de cálculo se puso a prueba con un modelo a escala (Lozano-Galant, Payá-Zaforteza, 2011). Derecha: Frontón Recoletos, Eduardo Torroja, 1935. Cubierta formada por dos cilindros de hormigón de 55 metros de luz en forma de alas (Chías Navarro, Abad Balboa, 2005.)

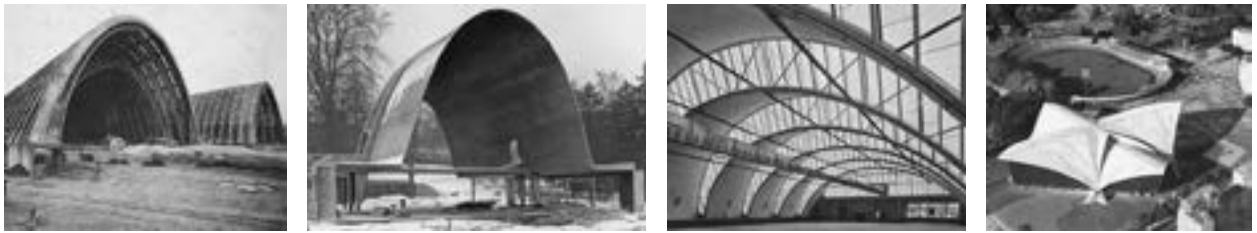


Figura 1.28. Primera imagen: hangares para dirigibles de Orly, Francia, Eugène Freyssinet, 1923. Estas estructuras son cilindros de directriz parabólica (Fernández Ordóñez, 1978). Segunda imagen: Cementhalle, Robert Maillart, Zurich, 1939. Lámina de hormigón gunitado, de 6 cm de espesor. Demolida (Maillart, Bill, 1955). Tercera imagen: nave industrial en Gossau, de Hossdorf, Danzeisen y Voser, 1954 (Cassinello, P., 2006). La cubierta está formada por cilindros de eje inclinado, permitiendo pasar la luz por el desfase entre las circunferencias de sus bases. Cuarta imagen: Estadio olímpico deportes de hielo, Grenoble, Francia, N. Esquillan, 1969. La cubierta se apoya en los puntos medios de un cuadrado de 113 metros de lado. Se forma por la intersección de dos cilindros de distinto radio. Ostenta el récord de voladizo en cubiertas abovedadas (48 metros) (Esquillan, 1969).

superficies cilíndricas con base dada por una curva alabeada más general, estas son las únicas que determinan cuádricas, es decir, son los ceros de un polinomio de segundo grado en tres variables. Dependiendo del tipo de cilindro su parametrización en forma canónica es la siguiente: en el caso de un cilindro elíptico, se tiene la parametrización:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a \cos(t), b \sin(t), s]$$

Cuando estamos ante un cilindro hiperbólico, podemos parametrizarlo en forma canónica mediante:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a \cosh(t), b \sinh(t), s]$$

Mientras que, si este es parabólico, una parametrización de $x^2 + by + cz + d = 0$, sería:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [t, s(-d - t^2 - bs)/c]$$

si c no se anula, y

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = \left[t, \frac{-d - t^2 - cs}{b}, s \right],$$

cuando b no se anula.

Paraboloide hiperbólico. Es una superficie cuádrica infinita y reglada que se produce por desplazamiento de una recta (generatriz) que se apoya sobre otras dos (directrices), manteniéndose paralela a un plano (Figura 1.29). Se da en muchas de las obras de Félix Candela (Figura 1.30), como el restaurante Los Manantiales, en Xochimilco, la capilla de Palmira, en Cuernavaca, o en el auditorio del Parque el Paraíso de Madrid, diseñado por Cleto Barreiro (Figura 1.31).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

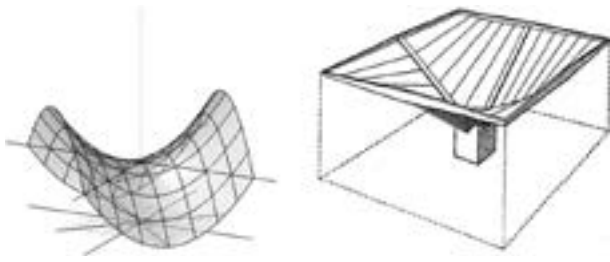


Figura 1.29. Izquierda: Paraboloide Hiperbólico. Derecha: Aimond, 1936, Paraguas, Etude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion. Este dibujo representa el primer diseño de paraguas formado por paraboloides hiperbólicos (Aimond, 1936, p. 10).

En esta situación, la submatriz de términos cuadráticos tiene un autovalor nulo, mientras que el determinante de la matriz principal es positivo. Es una de las superficies regladas que no son desarrollables,

ya que su curvatura gaussiana no se anula, y de hecho es siempre negativa. Una parametrización de un paraboloide en forma canónica sería de la forma:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t), b s \cosh(t), s^2]$$

y

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t), b s \cosh(t), -s^2]$$

La primera de las parametrizaciones dibuja los puntos por encima del plano de suelo, y la segunda aquellos por debajo. Solo dibujaría el origen de coordenadas en planta, en lugar del par de rectas secantes dadas por:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$



Figura 1.30. Izquierda: restaurante Los Manantiales, Félix Candela, 1958 (Cassinello, Pepa, 2010). Derecha: Capilla de Palmira en Cuernavaca, México, Félix Candela, 1958 (Draper, 2008).



Figura 1.31. Izquierda: Pabellón Philips, Le Corbusier y Iannis Xenakis, 1958 (Xenakis, Le Corbusier, 1994). Centro: planta embotelladora Barcardí, Tultitlán, México, Félix Candela, 1960 (Torroja, J. A., Cassinello y Schlaich, 2010). Derecha: cubierta para auditorio en el parque El Paraíso, San Blas (Madrid) de Cleto Barreiro Sorriveras, 2006. Es un conjunto formado por un paraboloide hiperbólico cuya planta está limitada por la forma de un óvalo, replicado varias veces en distintos tamaños y posiciones (Cleto, Fernando Caramés Gómez, 2007).

Hiperboloide hiperbólico. Es una superficie cuádrica infinita generada por la revolución de una rama de hipérbola sobre su eje imaginario, es decir, el perpendicular al que une los focos. Además, es una reglada en la que aparecen dos familias de rectas pertenecientes a la superficie, que se apoyan en dos circunferencias perpendiculares al eje de revolución. Si tomamos una de estas generatrices y la hacemos revolucionar alrededor del eje también obtenemos la misma superficie. El punto de menor distancia entre eje y generatriz marca la posición del círculo de garganta, el más reducido de toda la superficie (Figura 1.32).

Como ejemplo tenemos las torres de refrigeración de las centrales nucleares, que utilizan este hiperboloide de una hoja o hiperboloide hiperbólico. El palacio de la asamblea de Chandigarh realizado

por Le Corbusier en 1961 incluye un cascarón hiperboloide de hormigón cortado por un plano inclinado superior y aloja la gran sala de reunión. Destacan también las formas de la cubierta de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela y el depósito de Fedala, de Eduardo Torroja, el mirador Treetop, de EFFEKT (Figura 1.33), la silla Nest Chair (Lastra, De Miguel, 2020), de Markus Johanson o la estación de autobuses de El Casar, de Justo García (Figura 1.34).

En el marco de las matemáticas, los autovalores de la matriz de términos cuadráticos tienen distinto signo, y los autovectores asociados indican la dirección de sus ejes de simetría. Es una superficie doblemente reglada. Obsérvese, por ejemplo, en la familia de hiperboloides definidos por la ecuación implícita:

$$2x^2 + 2y^2 + [\cos(s) - 1]z^2 - \cos(s) - 1 = 0,$$



Figura 1.32. Izquierda: hiperboloide hiperbólico. Derecha: tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Madrid, Eduardo Torroja, 1935. Esta obra incorpora los hiperboloides hiperbólicos en las láminas voladas de la cubierta, mientras que las gradas se apoyan en bóvedas tóricas (Torroja, E., 1962b) (Moragues et al., 2015) (Martínez, I., Castillo, 2018).



Figura 1.33. Izquierda: depósito de agua en Fedala, Marruecos, Eduardo Torroja, 1956. La estructura consta de dos hiperboloides hiperbólicos unidos por su círculo de garganta y bóvedas anulares de directriz parabólica (Torroja, E., 1962a). Centro: mirador Treetop, Copenhague, Denmark, EFFEKT Studio, 2018. Este elemento es un hiperboloide hiperbólico representado por sus generatrices y directrices. En su interior se incluye una rampa helicoidal que se adapta a la forma de la hipérbola (Caliò, Marchetti, 2019). Derecha: Hélices contenidas en un hiperboloide de una hoja.



Figura 1.34. Estación de autobuses, El Casar de Cáceres, Justo García Rubio, 2004. Las láminas de hormigón combinan hiperboloides de diferentes radios.

para cualquier valor real de s . Si el valor de s es 0 tenemos un cilindro, mientras que para π conseguimos un cono. Todos los valores intermedios dibujan un hiperboloide hiperbólico. Además, es directo comprobar que para cada s , las dos familias de rectas parametrizadas por:

$$[x(t), y(t), z(t)] = [1 + t[\cos(s) - 1], t \sin(s), 2t - 1],$$

$$[x(t), y(t), z(t)] = [1 + t[\cos(s) - 1], -t \sin(s), 2t - 1],$$

son rectas contenidas en dicho hiperboloide. Una parametrización del hiperboloide definido en forma canónica sería:

$$\begin{aligned} [x(t, s), y(t, s), z(t, s)] &= \\ &= [a \cosh(t) \cos(s), b \cosh(t) \sin(s), c \cosh(t)] \end{aligned}$$

Paraboloide elíptico. Se produce por la rotación de una parábola en torno a su eje de simetría (Figura 1.35). Los objetos que suelen ilustrar esta superficie

son las copas de helado. La superficie de revolución generada por una parábola alrededor de su eje tiene la propiedad de reflejar todos los rayos desde el foco a la dirección del eje o viceversa. Esto hace su uso idóneo para la elaboración de faros, proyectores, antenas o radares. William Hutchinson en 1752 construyó el primer reflector parabólico de un faro de mar.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Respecto al paraboloide hiperbólico, en su clasificación solo difieren respecto al signo en el determinante de la matriz de la cuádrica. Sin embargo, sus estructuras son muy diferentes. Este no es una superficie reglada, y sin embargo es una superficie de revolución. Una parametrización cuando la cuádrica viene dada en forma canónica es:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \cos(t), b s \cos(t), s^2]$$



Figura 1.35. Izquierda: Paraboloide elíptico. Centro: Chozo de ramas en la Codosera, Badajoz. De Berrocal <http://joseluisolmoberrocal.blogspot.com/2013/02/los-chozos.html>. Esta estructura se construye para albergar a pastores en sus estancias en el campo. Se suele utilizar para ello ramas de encina recubiertas con retamas. La forma curva de las ramas se aproxima a la del paraboloide elíptico, arrancando con una curvatura más abierta, para redondearse en la mitad superior. El acabado en punta desdibuja un tanto su semejanza. Derecha: pabellón en el Parque de Ibirapuera, Sao Paulo, Oscar Niemeyer, 1954. Es una cúpula de hormigón de sección parabólica.

Hiperboloide elíptico. Superficie de revolución formada por las ramas de una hipérbola al rotar sobre el eje real (Figura 1.36). La forma recuerda bastante a la del paraboloides elíptico, aunque en este caso posee dos hojas.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Al igual que en el caso de los paraboloides, el hiperboloide elíptico y el hiperbólico difieren en cuanto a su clasificación en términos matriciales en el signo del determinante de la matriz que define la cuádrica. Por otro lado, es la única cuádrica que

está formada por dos componentes conexas, desde el punto de vista topológico. Una parametrización de esta cuádrica es:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t) \cos(s), \\ b \operatorname{sen} h(t) \operatorname{sen}(s), c \cos h(t)],$$

para la rama superior y

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t) \cos(s), \\ b \operatorname{sen} h(t) \operatorname{sen}(s), -c \cos h(t)],$$

para la rama inferior.

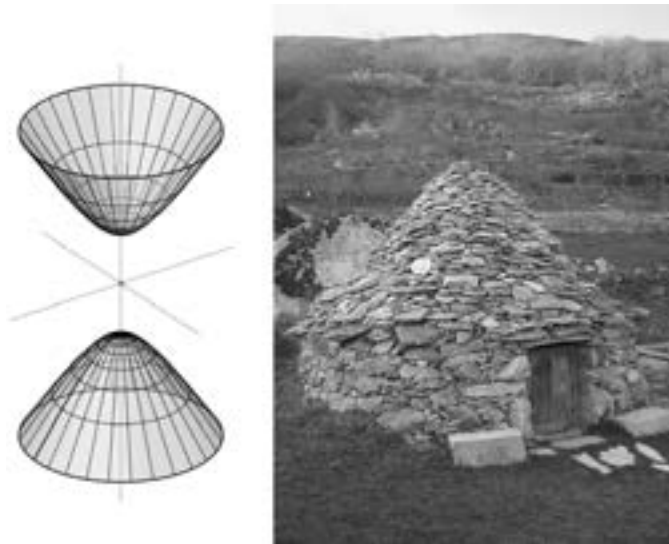


Figura 1.36. Izquierda: Hiperboloide elíptico. Derecha: Chozo de piedra. <https://es.wikipedia.org/wiki/Chozo>. Construcción tradicional de zonas de pastoreo en España. La forma cónica responde a una falsa cúpula de lajas inclinadas, que se redondea en la cúspide, lo que recuerda al cono asintótico del hiperboloide y por ello se puede considerar aproximada a esta superficie.

1.7. Otras superficies regladas en arquitectura

Las regladas son superficies especialmente utilizadas en construcción debido a su facilidad para calcular, replantar en obra y sistematizar su construcción (Figura 1.37 a Figura 1.40). Veremos que helicoides, como las escaleras de caracol, son definidas por la geometría del peldaño, que facilita la producción seriada. O los capitalzados, superficies de interpolación de dos curvas a través de una superficie reglada, a los que recurría la cantería para resolver complejos encuentros.

En general, una superficie reglada es una superficie que puede parametrizarse en la forma:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = \alpha(t) + s\beta(t),$$

donde $\alpha(t)$ es la parametrización de una curva alabeada, y siendo $\beta(t)$ un vector del espacio vectorial tridimensional real que resulta ser la dirección no nula que siguen las generatrices de la superficie reglada. Así, para cada valor del primer parámetro se tiene una recta que pasa por la curva directriz, con dirección dada por el vector $\beta(t)$. Entre las superficies regladas destacamos, por su interés en arquitectura las superficies cónicas (entre las que se encuentran los conos, como superficies cuádricas), cuya parametrización es tal que el vector desde $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ tiene un punto común para todo valor de t ; las superficies cilíndricas (entre ellas los cilindros que se engloban dentro de las superficies cuádricas, pero no restringido a ellos) para las cuales $\beta(t)$ es constante; o las superficies helicoidales. Estas últimas forman parte de las llamadas *superfi-*

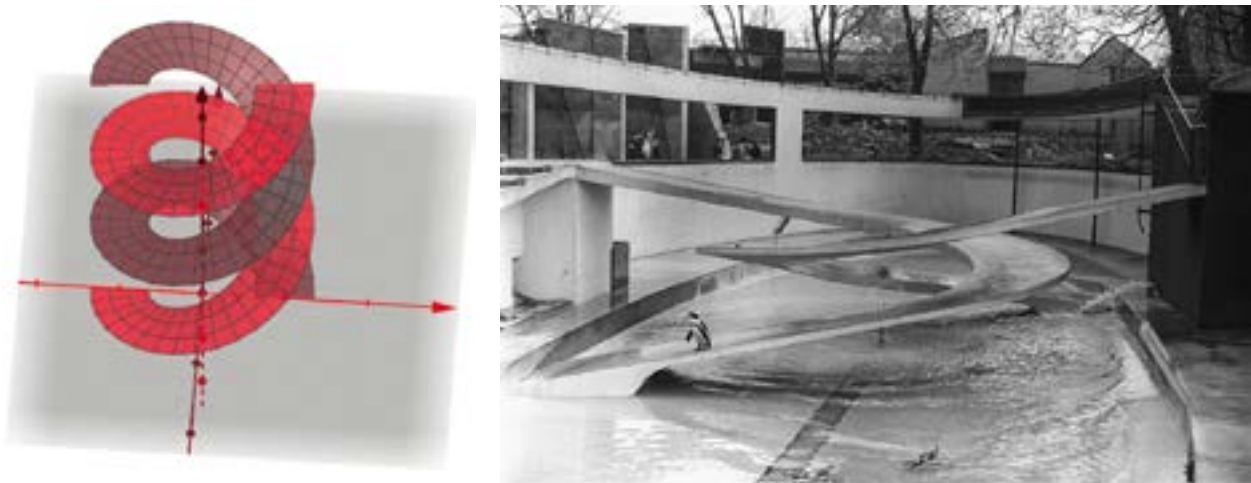


Figura 1.37. Izquierda: doble helicoide. Derecha: penguin Pool, Park Zoo, Londres, Berthold Lubetkin, 1934 (imagen de Gillfoto, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London_Zoo_40393.jpg, Wikimedia Commons). Las rampas son losas helicoidales voladas.



Figura 1.38. Izquierda: Museo de la Memoria de Andalucía, Granada (Campo Baeza, 2010). Las rampas son helicoides cilíndricos. Derecha: Cúpula del Reichstag, Norman Foster, 1999 (imagen de Francesco Luca Labianca, licencia Unsplash, <https://unsplash.com/es/fotos/s6GxA0FDDBE>). Las rampas interiores son helicoides que se apoyan en hélices esféricas.

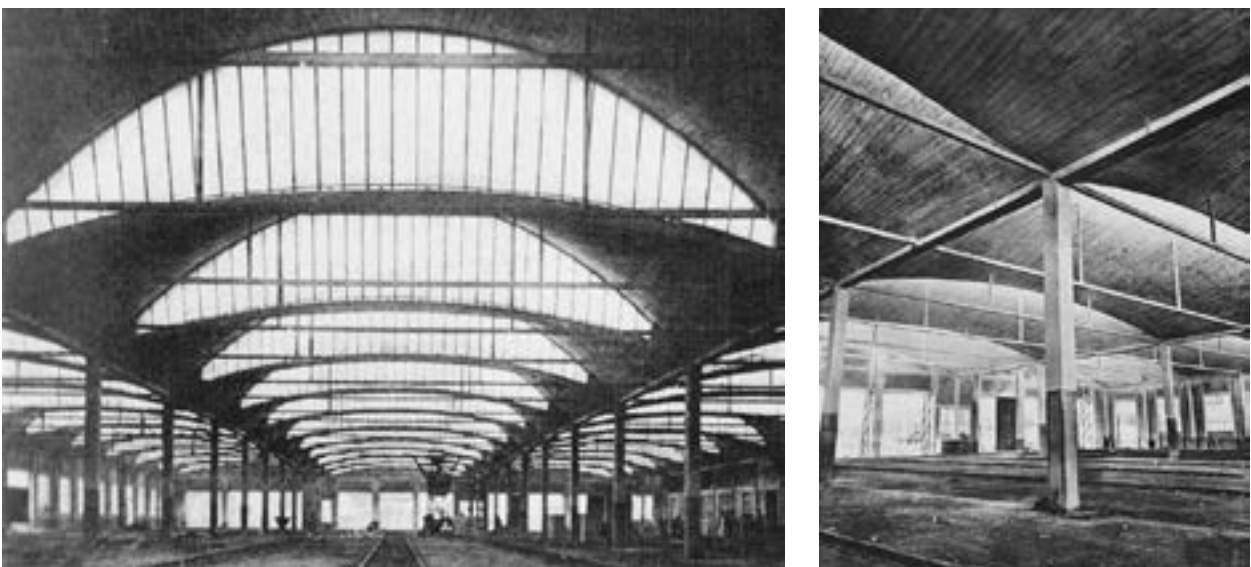


Figura 1.39. Taller de reparación de ferrocarriles en Bagneux, Eugène Freyssinet, 1927 (Fernández Ordóñez, 1978), p. 113. Las cubiertas son superficies regladas que unen dos arcos de distinto radio.



Figura 1.40. Izquierda: Escuela de la Sagrada Familia, Antonio Gaudí, 1909 (Adell, García Santos, 2005). Es una superficie reglada que une la recta central con dos curvas sinusoidales laterales opuestas. Derecha: Iglesia del Cristo Obrero, Atlántida, Uruguay, Eladio Dieste, 1959. (Dieste, 1961) (Guindal, Adell, 2005). Las paredes son superficies regladas que unen una recta a nivel de suelo con una curva senoide en coronación. La cubierta, sin embargo, es una red de curvas que une las sinusoides horizontales laterales con la vertical central.

cies de Catalan, para las cuales el vector $\beta(t)$ se encuentra siempre en una variedad de dimensión dos. Así, por ejemplo, el helicoides clásico se parametriza mediante:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [s \cos(t), s \sin(t), t]$$

y que por tanto se puede escribir como:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [0, 0, t] + s[\cos(t), \sin(t), 0]$$

Obsérvese que el vector $\beta(t)$ se encuentra en el plano de suelo.

Las estructuras conoides también son una subclase de las superficies de catalán (Figura 1.41). Estas satisfacen que todas las generatrices pasan por una recta determinada. Por ejemplo, supongamos que la recta por la que pasan todas las generatrices es la recta de ecuaciones $x = z = 0$ y la directriz es la

parábola parametrizada por $(1, s, -s^2)$ para valores del parámetro entre -1 y 1 , que está contenido en el plano $x = 1$. Entonces, la superficie conoide resultante tiene la parametrización dada por:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [1 + s, t^2, st^2],$$

para s real y t entre -1 y 1 .

1.8. Otras superficies curvas en arquitectura

Algunas arquitecturas se basan en el desplazamiento de unas curvas sobre otras, a veces utilizando curvas planas y en otras ocasiones alabeadas. Por ejemplo, el proyecto para el Club Tachira de Torroja, la fábrica Sicli, de Isler en Ginebra (Figura 1.42), las bóvedas de la iglesia del Cristo Obrero, de Dieste, o el Ontario Pavillion, de Hariri Pontarini (Figura 1.43).



Figura 1.41. Izquierda: conoide. Derecha: marquesina de la Unesco, París, Pier Luigi Nervi y Marcel Breuer, 1958. (Martín Fuentes, 2018). Esta superficie reglada une un arco y una curva superior muy tendida.

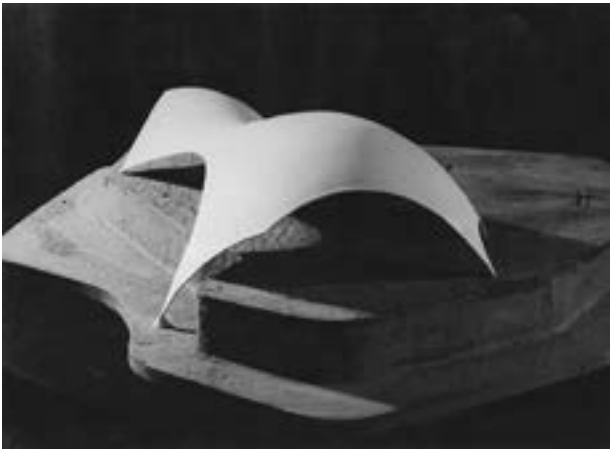


Figura 1.42. Izquierda: Proyecto para el Club Tachira, Eduardo Torroja, 1957. Se configura como el deslizamiento de una parábola sobre una curva alabeada (Escrig, Sánchez, 2005). Derecha: fábrica Sicli, Ginebra, Heinz Isler, 1969 (Chilton, Chuang, 2017). (Chilton, 2000) (Kotnik, 2011) (Baghdadi, Heristchian y Kloft, 2019).

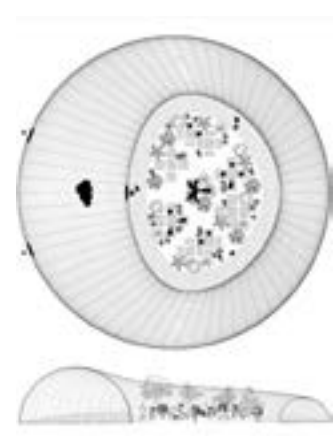


Figura 1.43. Izquierda: Ontario Pavilion, Hariri Pontarini, 2015 (Jungjohann, Woodington, 2016). Centro y derecha: espacio La Nube, Madrid, Álvaro Gómis, Hugo Cifre, Margarita Fernández, Miguel Ángel Maure, 2016 (Cifre, Gomis y Maure). Son superficies formada por un arco trasladado sobre otras dos curvas planas abiertas o cerradas.

Los toros o toroides son superficies de revolución en los que una curva revoluciona en torno a una recta que no pasa por su centro o eje. Son ejemplos algunas bóvedas de Torroja, como las de ladrillo del depósito de Fedala, o las bóvedas de hormigón bajo la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela (Figura 1.44).

El modelado de un toro clásico matemáticamente consiste en girar una circunferencia cuyo centro se encuentra en otra circunferencia, ambas situadas en planos perpendiculares, siendo el vector normal al plano que contiene la primera el vector tangente a la segunda. Con esta descripción se puede parametrizar un toro clásico por:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [R \cos(t) + r \cos(s) \cos(t), R \sin(t) + r \cos(s) \sin(t), r \sin(s)]$$

En la parametrización anterior, R representa el radio de la circunferencia fija y r el de la circunferencia móvil. Obsérvese que toda la superficie queda recubierta en cada intervalo de longitud 2π . La ecuación implícita del toro se puede obtener también mediante resultados de implicitación de parametrizaciones, obteniendo la superficie asociada a la ecuación

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Cabe señalar que esta es una cuártica, mencionada previamente en el texto.

La Figura 1.45 muestra la aproximación al Winward City Foodland de Joedicke a partir de una representación paramétrica del toro, ajustando la definición de sus parámetros adecuadamente.

$$[\cos(u)[R + r \cos(v)], \sin(u)[R + r \cos(v)], r \sin(v)]$$



Figura 1.44. Izquierda: Tribunas del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1935. Las bóvedas bajo las gradas son láminas tóricas de hormigón. La curvatura transversal se mantiene, mientras la directriz longitudinal combina una recta y dos arcos de circunferencia, creando una gran riqueza espacial a la vez que saca un gran partido a la cimbra. Imagen de los autores. Derecha: parroquia de los Santos Apóstoles, urbanización Las Lomas, Boadilla del Monte, Madrid, Rafael García de Castro y Ricardo Mexía, 1968 (García De Castro, 1968). La cubierta de esta iglesia se genera por revolución de una rama de hipérbola girando sobre su asíntota, que se sitúa como eje vertical.



Figura 1.45. Izquierda: Windward City Foodland, Keneohe, Hawaii, UU. EE., J. Joedicke, 1958 (Joedicke, 1964). La cubierta es una bóveda por arista bitórica, cubre una planta cuadrada de 39 metros de lado y su espesor varía desde 8 cm en el centro hasta los 18 cm. Derecha: representación del edificio toroidal en Keneohe. Representación Geogebra.

junto con un toro rotado horizontalmente un cuarto de vuelta.

1.9. Clasificación de superficies regladas alabeadas

Las superficies regladas alabeadas son de especial relevancia en arquitectura porque permiten calcular y replantear las estructuras con relativa facilidad. No todas son desarrollables, pero su configuración a base de generatrices permite un buen control formal. (Izquierdo Asensi, 1996). Se presenta una clasificación en las tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

1.10. Teoremas de cuádricas

Para poder resolver los problemas de operaciones con cuádricas el conocimiento de los teoremas es fundamental. La que sigue no es una clasificación exhaustiva, pero es necesaria para la práctica de la geometría descriptiva (Gil López, 2006):

- Toda sección plana de una cuádrica es una cónica.
- Dos secciones planas de una misma cuádrica son homológicas.
- La intersección de dos cuádricas es, en general, una curva de cuarto grado y la pro-

Tabla 1.1. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies anaxiales (sin directrices rectas o ejes). Elaboración de los autores.

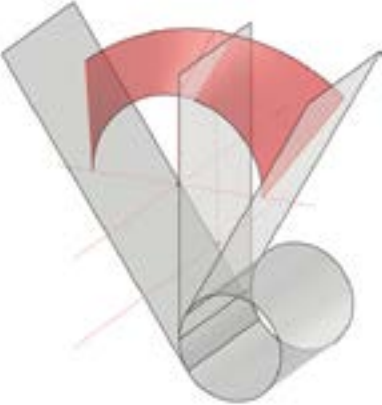
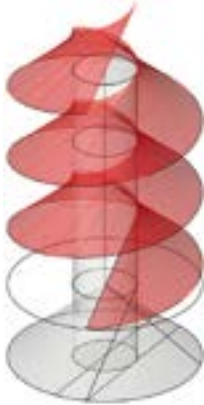
Anaxial ordinaria	Anaxial de cono director
	
Capialzado cilíndrico	Helicoide cilíndrico oblicuo

Tabla 1.2. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies axiales (una directriz recta o eje). Elaboración de los autores.

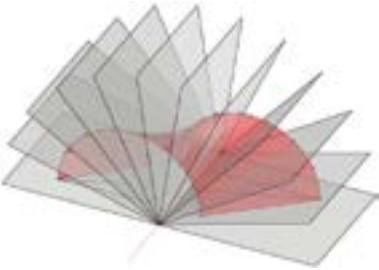
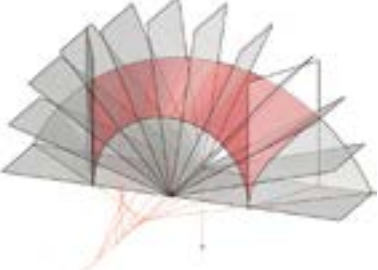
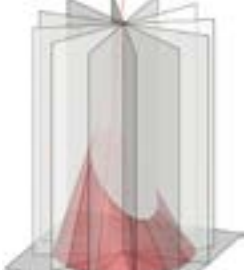
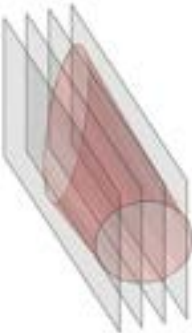
Axial ordinaria		
		
Cuerno de Vaca	Capialzado de Marsella	Cono alabeado
Axial de plano director		Axial de cono director
		
Cilindroide	Helicoide cilíndrico recto	Helicoide axial oblicuo

Tabla 1.3. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies biaxiales. Elaboración de los autores.

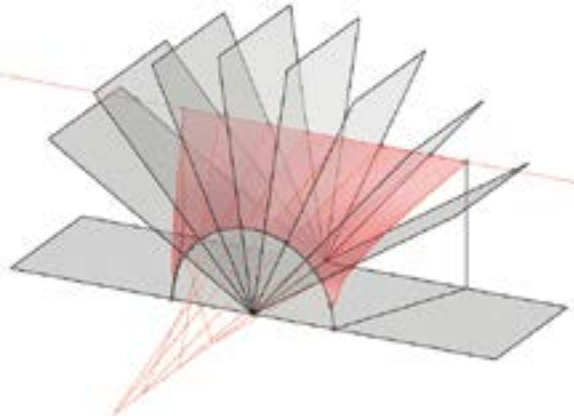
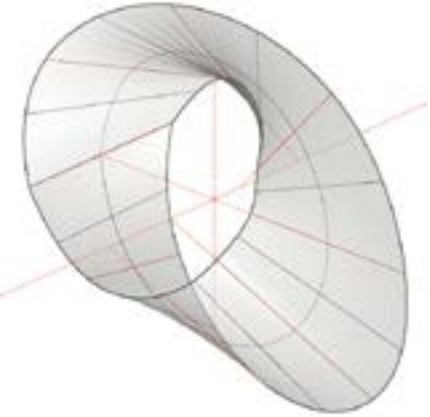
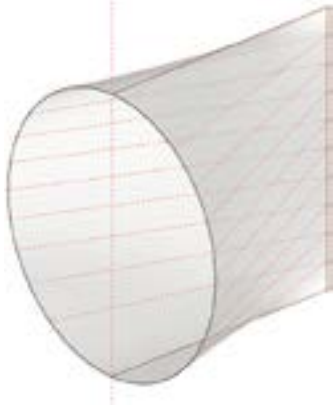
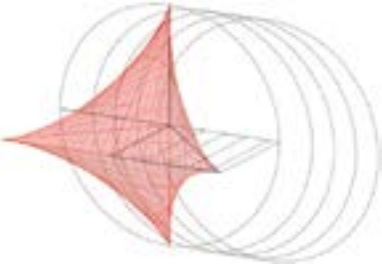
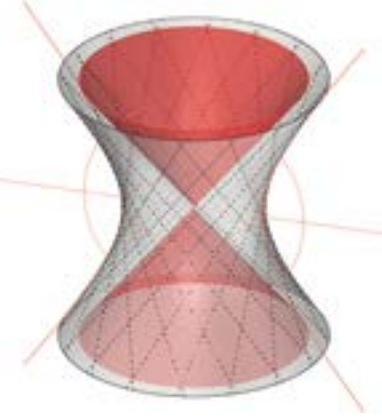
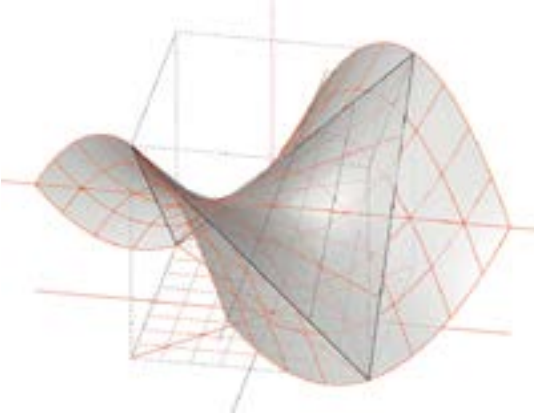
Biaxial ordinaria		
		
Capialzado de arco de Arco Círculo o de San Antonio		Birrotacional de una sola cara
Biaxial de plano director		Biaxial de cono director
		
Conoide	Helicoide axial recto	Tetraedroide

Tabla 1.4. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies triaxiales. Elaboración de los autores.

Triaxial ordinaria	Triaxial de plano director
	
Hiperboloide hiperbólico	Paraboloide hiperbólico

- yección de esta curva sobre cualquier plano es, en general, una curva de cuarto grado.
- Cuando dos cuádricas tienen una cónica en común, el resto de la intersección será otra cuádrica.
 - Dos cuádricas tangentes en dos puntos se cortan según dos curvas planas (cónicas) que pasan por dichos puntos.
 - La intersección de dos cuádricas que tienen un plano de simetría común se proyecta ortogonalmente sobre ese plano como una cónica.
 - Si dos cuádricas que se intersecan según dos curvas planas tienen un plano de simetría común, la proyección sobre este serán dos rectas.
 - La curva de tangencia entre dos cuádricas es plana.
 - Dos cuádricas homotéticas se intersecan según dos curvas planas, una propia y otra impropia.
 - La intersección de dos cuádricas de revolución con ejes paralelos se proyecta ortogonalmente en el plano de los ejes según arco o arcos de la misma parábola.
 - La intersección de dos cuádricas de revolución de ejes incidentes se proyecta ortogonalmente en el plano de los ejes según arco o arcos de la misma hipérbola.
 - La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común una generatriz se cumple con una curva de tercer grado.
 - La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común dos generatrices concurrentes se completa con otras dos generatrices o una cónica.