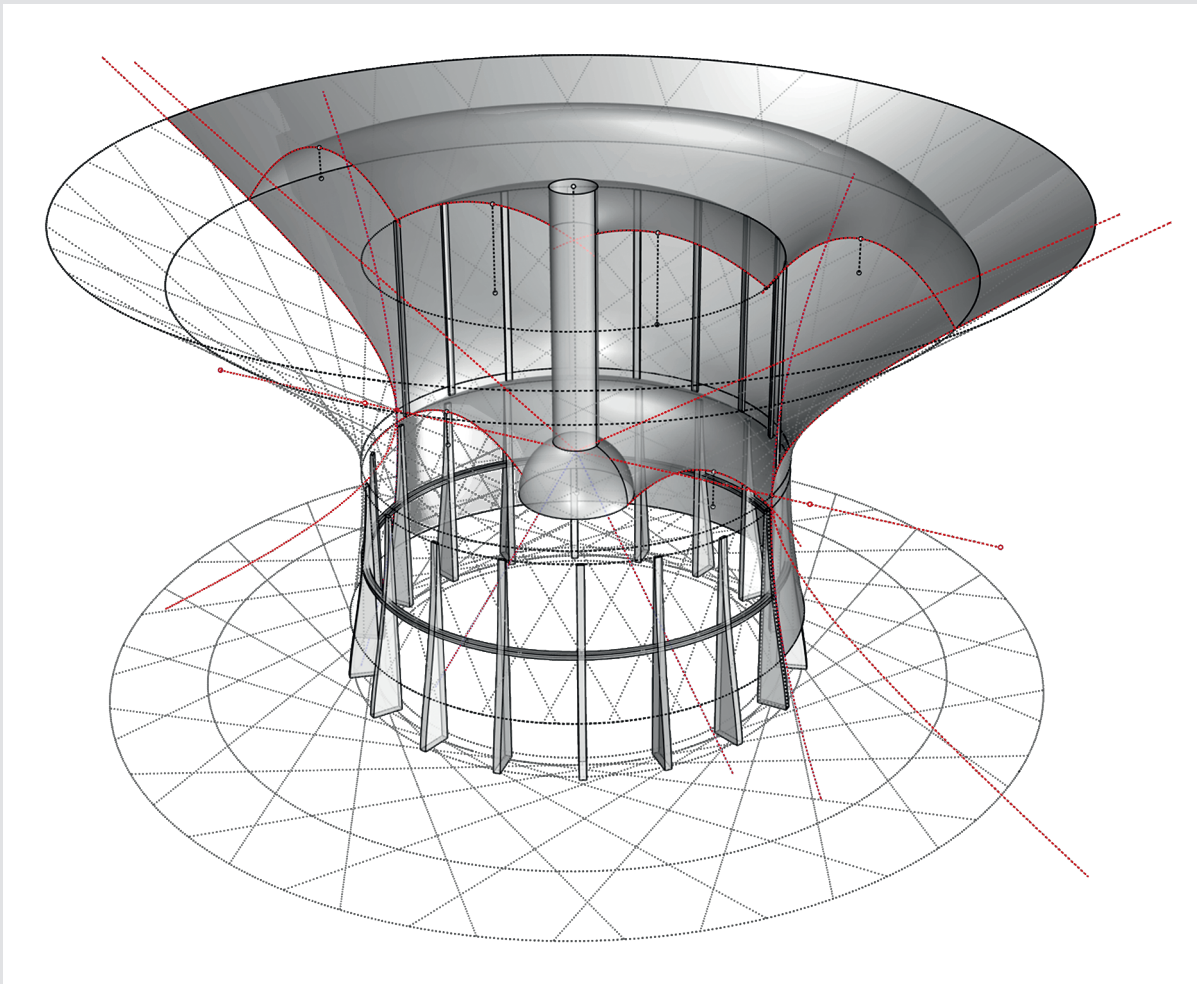


CURVAS Y SUPERFICIES PARA LA ARQUITECTURA E INGENIERÍA

Alberto Lastra Sedano
Manuel de Miguel Sánchez
Patricia Domínguez Gómez



Alberto Lastra Sedano, Manuel de Miguel Sánchez y Patricia Domínguez Gómez

Los autores son profesores e investigadores de la Universidad de Alcalá que comparten su interés por las curvas y superficies parametrizables presentes en las obras de arquitectura e ingeniería, tanto históricas como contemporáneas. Alberto Lastra es catedrático del Departamento de Física y Matemáticas, desarrolla su investigación sobre análisis funcional y ecuaciones funcionales en el dominio complejo. Sus resultados han sido publicados a través de numerosos artículos en revistas de alto impacto científico. Ha realizado estancias de docencia e investigación en universidades europeas, asiáticas y americanas. Manuel de Miguel es profesor titular del Departamento de Arquitectura, especializado en la enseñanza de la geometría y ha participado en varios proyectos de investigación ligados a la puesta en valor del patrimonio arquitectónico a través del análisis gráfico. Patricia Domínguez es profesora asociada del Departamento de Arquitectura y desarrolla su investigación doctoral en el campo del diseño generativo aplicado a la arquitectura.

Imagen de cubierta: análisis geométrico del depósito de Fedala, de Eduardo Torroja (1958). Dibujo de los autores.

**CURVAS Y SUPERFICIES
PARA LA ARQUITECTURA E INGENIERÍA**

MONOGRAFÍAS DEL IETcc, N.º 441

Dirección

Maximina Romero Pérez, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc), CSIC

Secretaría

Román Nevshupa Kasatkin, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc), CSIC

Comité Editorial

María del Mar Alonso López, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc), CSIC

Antonio Álvaro Aznar López, Universidad Politécnica de Madrid

Borja Frutos Vázquez, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc), CSIC

David Izquierdo López, Universidad Politécnica de Madrid

Ángel Manuel González Santos, Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas (CEDEX)

Sonia Martínez de Mingo, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc), CSIC

Mónica Martínez Martínez, Universidad de Alcalá

Isabel María Martínez Sierra, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc), CSIC

Juan Carlos Pérez Sánchez, Universidad de Alicante

Rena C. Yu, Universidad de Castilla-La Mancha

CURVAS Y SUPERFICIES PARA LA ARQUITECTURA E INGENIERÍA

Alberto Lastra Sedano
Manuel de Miguel Sánchez
Patricia Domínguez Gómez

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

Madrid, 2024

La versión electrónica de este libro está disponible en acceso abierto en editorial.csic.es y se distribuye bajo los términos de la licencia Creative Commons Atribución-Non Comercial-No Derivadas 4.0. La información completa sobre dicha licencia puede ser consultada en <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Esta licencia afecta solo al material original del libro. El uso del material proveniente de otras fuentes (indicadas en las referencias), como diagramas, ilustraciones, fotografías o fragmentos de textos, requerirá permiso de los titulares del *copyright*.

Las noticias, los asertos y las opiniones contenidos en esta obra son de la exclusiva responsabilidad del autor o autores. La editorial, por su parte, solo se hace responsable del interés científico de sus publicaciones.

Cómo citar: *Curvas y superficies para la arquitectura e ingeniería* / Alberto Lastra Sedano, Manuel de Miguel Sánchez y Patricia Domínguez Gómez. Madrid: CSIC, 2024.

Catálogo de publicaciones de la Administración General del Estado:
<https://cpage.mpr.gob.es>

EDITORIAL CSIC: <http://editorial.csic.es> (correo: publ@csic.es)



© CSIC, 2024

© Alberto Lastra Sedano, Manuel de Miguel Sánchez
y Patricia Domínguez Gómez

© De las imágenes, las fuentes mencionadas a pie de figura

© Imagen de cubierta: análisis geométrico del depósito de Fedala, de Eduardo Torroja (1958). Dibujo de los autores.

ISBN: 978-84-00-11301-8

e-ISBN: 978-84-00-11302-5

NIPO: 155-24-152-3

e-NIPO: 155-24-153-9

Depósito Legal: M-14795-2024

Corrección y coordinación editorial: Enrique Barba (Editorial CSIC)

Maquetación: Gráficas Blanco, S. L.

Impresión y encuadernación: Discript Preimpresión, S. L.

Impreso en España. *Printed in Spain*

En esta edición se ha utilizado papel ecológico sometido a un proceso de blanqueado ECF, cuya fibra procede de bosques gestionados de forma sostenible.

ÍNDICE

Perfil académico de los autores	9
1. Curvas y superficies en la arquitectura e ingeniería.....	11
1.1. Ideación, cálculo y construcción. Control de la forma	12
1.2. Objeto y herramienta	14
1.3. Curvas cónicas.....	15
1.4. Otras curvas planas en arquitectura.....	19
1.5. Curvas alabeadas.....	22
1.6. Superficies cuádricas y formas libres	23
1.7. Otras superficies regladas en arquitectura	31
1.8. Otras superficies curvas en arquitectura	33
1.9. Clasificación de superficies regladas alabeadas	35
1.10. Teoremas de cuádricas.....	35
2. Curvas y superficies en los tratados de cantería y geometría descriptiva.....	39
2.1. La representación de curvas y superficies en el siglo XVI.....	39
2.2. Siglos XVII y XVIII.....	45
2.3. Siglo XIX	50
3. Autores, obras y análisis de curvas y superficies.....	57
3.1. Antonio Gaudí	57
3.2. Pioneros de las láminas Hypar	59
3.3. Eugène Freyssinet	59
3.3.1. Hangares de Orly	59
3.4. Robert Maillart.....	63
3.4.1. Hall del Cemento	63
3.5. Eduardo Torroja.....	67
3.5.1. El Mercado de Algeciras	67
3.5.2. El graderío del Hipódromo de la Zarzuela	68
3.5.3. El depósito de Fedala	74
3.6. Félix Candela.....	75
3.6.1. Pabellón de los rayos cósmicos.....	76
3.6.2. Restaurante Los Manantiales	77
3.6.3. Capilla de Palmira en Cuernavaca	81
3.6.4. Planta embotelladora Bacardí	81
3.6.5. Nuestra Señora de Guadalupe	83
3.7. Matthew Nowicki	85
3.7.1. Dorton Arena	85
3.8. Heinz Hossdorf	87
3.8.1. Nave industrial en Gossau	87
3.9. Eladio Dieste	89
3.9.1. Iglesia de Atlántida	89
3.10. Eero Saarinen.....	94
3.10.1. Kresge Auditorium	94
3.10.2. Ingalls Rink.....	96

3.11. Norman Foster	99
3.11.1. Cúpula del Reichstag en Berlín.....	99
4. Conclusiones.....	105
5. Referencias	107
6. Índice onomástico	111

PERFIL ACADÉMICO DE LOS AUTORES

Alberto Lastra Sedano es doctor en Matemáticas por la Universidad de Valladolid (2009) y licenciado en Matemáticas (2005) por dicha universidad. Combina su investigación sobre análisis funcional y ecuaciones funcionales en el dominio complejo con el estudio de curvas y superficies aplicadas a la geometría de obras arquitectónicas. Esta última faceta se encuentra ligada a la docencia durante más de diez años como materia interdisciplinar impartida conjuntamente con el área de Expresión Gráfica Arquitectónica de la Universidad de Alcalá. Su investigación en esta dirección se nutre de innovación docente y distintos proyectos de investigación e innovación docente en los que ha participado o dirigido. Sus resultados se encuentran publicados en alrededor de sesenta artículos en revistas indexadas en JCR, mayoritariamente en revistas de alto impacto, así como libros de investigación y docentes (<https://albertolastra.web.uah.es/wp/>) Es catedrático del Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad de Alcalá. Ha realizado estancias en centros de investigación como Universidad de Lille (Francia), Universidad de La Rochelle (Francia), Universidad Federal de Minas Gerais (Brasil), Universidad Johannes Kepler (Austria) o el Instituto de Matemáticas de la Academia Polaca de Ciencias. Ha impartido conferencias en congresos internacionales, también como miembro de los comités organizador y científico. Actualmente coordina el máster de Formación del Profesorado en la especialidad de Matemáticas, y es representante de la rama de Ciencias en el equipo del Centro de Apoyo a la Innovación Docente y Estudios en línea de la Universidad de Alcalá de Henares (UAH). También ha sido coordinador de movilidad de la Escuela de Arquitectura.

Manuel de Miguel Sánchez es doctor en Arquitectura por la Universidad de Alcalá de Henares (2014), arquitecto por la Universidad Politécnica de Madrid desde 1996 y máster en Restauración Arquitectónica por la Universidad Politécnica de Madrid (2001). Los principales campos en los que ha trabajado como investigador han sido: estudios analíticos de arquitectura histórica y contemporánea; patrimonio, geometría, construcción y sostenibilidad y relaciones entre las matemáticas y la arquitectura, docencia e innovación. Forma parte del grupo de investigación de la UAH «Intervención en el Patrimonio y Arquitectura Sostenible» (CCTE2.006/R34). Es investigador principal de varios proyectos cuyo objetivo es la recuperación del conocimiento y la tecnología de la carpintería de armar española y especialmente el estudio de los artesanos renacentistas castellanos. Ha publicado los resultados de sus trabajos en numerosas revistas científicas y congresos internacionales (<https://www.uah.es/es/estudios/profesor/Manuel-de-Miguel-Sanchez/>) Es profesor titular del Departamento de Arquitectura de la Universidad de Alcalá, ha enseñado en varias universidades y realizado estancias en centros de investigación extranjeros, tales como la Universidad de Berkeley (California, EE. UU.), el Instituto de Urbanismo de París (Francia) o el Politécnico de Turín (Italia). Ha desempeñado varios cargos de gestión en la Universidad. Actualmente es secretario de la Escuela de Arquitectura de la Universidad de Alcalá. También ha sido coordinador de Calidad del máster en Arquitectura y coordinador del programa de TFG del grado en Fundamentos de Arquitectura y Urbanismo.

Patricia Domínguez Gómez es arquitecta por la Universidad de Alcalá de Henares (2015). Actualmente cursa los estudios de doctorado en Arquitectura en la línea de Innovaciones Tecnológicas en Arquitectura. Compagina estos estudios con la docencia como profesora asociada en el área de Expresión Gráfica Arquitectónica de la Escuela de Arquitectura de la UAH y con el ejercicio libre de la profesión. Las líneas de investigación en las que trabaja son la eficiencia energética del patrimonio arquitectónico, el análisis de este mediante técnicas digitales y las herramientas de diseño generativo aplicadas al diseño y a la docencia. Forma parte del Grupo de Alto Rendimiento Patrimonio arquitectónico y arquitectura sostenible (*Built Heritage and Sustainable Architecture*). Además, desarrolla labores de innovación docente en el grupo de innovación docente UAH-GI20-118 Herramientas gráficas visuales y geométricas, y ha participado en diversos Encuentros de Innovación en Docencia Universitaria (EIDU) de la UAH, mostrando los resultados obtenidos del equipo de docentes de la materia Geometría y Representación III.

1. CURVAS Y SUPERFICIES EN LA ARQUITECTURA E INGENIERÍA

Durante más de dos mil años las grandes estructuras, como bóvedas y cúpulas, han sido ideadas como cáscaras que cubren grandes luces. Hasta el siglo xx se han construido en fábrica de ladrillo, piedra o alguna clase de hormigón más o menos reforzado. Materiales muy capaces en compresión, pero bastante débiles en tracción. Entre los ejemplos más exitosos están el Panteón de Roma (124 d. C.; 43 metros de luz), o Santa Sofía de Constantinopla, Estambul (537 d. C.; 33 m), Santa María de las Flores de Florencia (1434; 41 m) o la basílica de San Pedro del Vaticano (1590; 42 m). En cualquiera de estos casos, la relación entre luz y espesor medio ronda 1/50. Durante la edad media las bóvedas góticas siguieron haciéndose cada vez más complejas y ricas, aunque las luces no aumentaron (Chilton, 2000).

En el siglo xx, con la llegada del hormigón armado y especialmente el pretensado, la esbeltez de las estructuras creció notablemente, dando lugar a cáscaras finas de increíble resistencia y estabilidad. Entre los ingenieros más destacados en la puesta en práctica de estas estructuras se encuentran Eduardo Torroja (1899-1961), Pier Luigi Nervi (1891-1979), Ove Arup (1895-1988), Nicolas Esquillan (1902-1989), Félix Candela (1910-1997), Heinz Isler (1926-2009), etc. Estos diseñadores utilizan en sus proyectos superficies definidas por ecuaciones matemáticas que han facilitado el cálculo de los esfuerzos de esas láminas de hormigón.

Las superficies de geometrías complejas transforman la materia para construir obras estructural y formalmente destacadas. Este libro se centra especialmente en la arquitectura y la ingeniería de los siglos xx y xxi. La ventaja de estudiar arquitectura contemporánea respecto de las obras históricas es la esbeltez de sus estructuras y la ausencia de decoración, pues estos rasgos las aproximan más al nivel de abstracción del análisis geométrico que aquí se propone. No obstante, el estudio de las estructuras históricas, como bóvedas, cúpulas, escaleras de caracol, capialzados, trompas, etc., están muy presentes en el enfoque del trabajo que sigue, tanto a nivel teórico como en los casos presentados.

Son, por tanto, objeto de este estudio las obras de arquitectura e ingeniería en los que las curvas y

superficies son rasgo de identidad de sus diseños. Destacan las curvas algebraicas, que son aquellas que verifican ecuaciones polinomiales, principalmente las que satisfacen una ecuación polinomial de segundo grado, aunque existen casos de obras que han utilizado otras curvas regulares en casi la totalidad de sus puntos, como la cicloide o la lemniscata. También son de gran importancia las curvas alabeadas, como las hélices, asociadas a escaleras de caracol y rampas helicoidales, o las curvas cuárticas, que se producen habitualmente como resultado de las intersecciones entre superficies.

Otro grupo importante para estudiar son las superficies cuádricas, que también verifican ecuaciones polinomiales de segundo grado en tres variables. Veremos tanto radiadas como hiperbólicas y elípticas. Además, nos interesan otras superficies regladas como las superficies helicoidales y los conoides. Entre estos últimos destacan especialmente, por su presencia en la arquitectura, los capialzados.

Se puede afirmar que la geometría diferencial de curvas y superficies nace con las lecciones de Monge, trabajo que continúan muchos matemáticos de la escuela francesa del siglo xix. Otra referencia fundamental es la de Gauss, que propuso estudiar las curvas y superficies por medio de representaciones paramétricas de los objetos. En lo que se refiere a curvas y superficies desde el punto de vista matemático, tanto la forma paramétrica como la forma implícita de definir curvas y superficies serán importantes a la hora de manejar una curva. Desde una parametrización podemos construir la curva sin más que dando valores al parámetro que la define, mientras que la forma implícita nos permite detectar de forma directa cuándo un punto pertenece o no a la curva, o la definición de curvas ligeramente perturbadas que se asemejan a la inicial sin más que sumar una cantidad suficientemente pequeña a la ecuación implícita que define la curva. Además, los elementos asociados a una curva, como los vectores tangente y normal, proporcionan un mayor conocimiento de esta (Lastra Sedano, 2021). Y la definición de la curva puede incorporar distintas propiedades físicas o estéticas como la acústica en un edificio, la configuración de cargas, la luminosidad, etc.

Principalmente, la manera en la que se relacionan ambas vías de describir una curva o superficie regular es de forma local, estableciendo parametrizaciones de (parte de) la curva o superficie bajo condiciones de regularidad y ante la ausencia de puntos singulares (Figura 1.1).

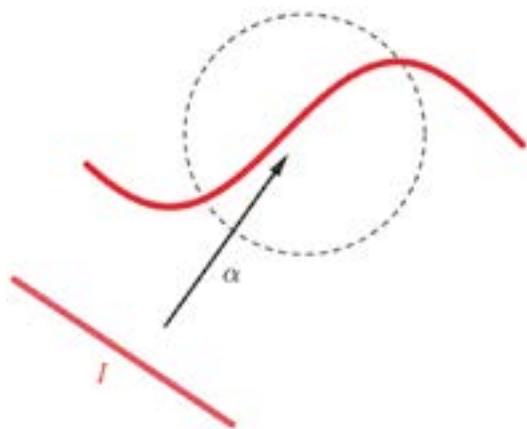


Figura 1.1. Idea de parametrización local de una curva plana. Elaboración propia.

La arquitectura y la ingeniería han hecho uso de curvas y superficies y las han combinado y desarrollado de manera habitual. Nuestro interés se centra en analizar obras y proyectos que aprovechan los conocimientos de geometría y expresar gráfica y analíticamente tales elementos como generadores abstractos del espacio. «El análisis de la forma arquitectónica comienza cuando se pretende alcanzar un conocimiento profundo de la misma, cuando se intenta comprender.» (Montes, 1992) Para conseguir este objetivo vamos a descomponer sus elementos y vamos a descubrir los principios y procesos que la generaron. Nos aproximaremos desde los puntos de vista de la geometría descriptiva y las matemáticas, pero no perderemos de vista su importancia formal, estructural y constructiva.

El estudio de las curvas y superficies utilizadas en edificación nos interesa en relación con la formación del diseñador contemporáneo, pues, entre otras, aporta dos ventajas que consideramos fundamentales: la primera y más evidente es que ofrece al estudiante la oportunidad de conocer obras y autores de gran relevancia, muchos de los cuales suelen quedar fuera de los programas habituales de Historia de la Arquitectura o Ingeniería. Pero sobre todo ofrece la oportunidad de analizar los procesos de ideación, poniendo al estudioso en la piel del arquitecto, ingeniero o diseñador que tiene que enfrentarse a nuevos retos y utiliza sus conocimientos de elementos abstractos para proponer soluciones innovadoras.

Los principales beneficios que aporta el estudio de las curvas y superficies de arquitectura e ingeniería se pueden resumir en: Conocer y manejar objetos de geometría compleja, desarrollar los mecanismos de la abstracción geométrica, como la visión espacial, la definición de los elementos y sus propiedades, las posibilidades de proyecto aportadas por operaciones, procesos, transformaciones, etc. Además, permite iniciarse en la investigación en materia de geometría arquitectónica. La metodología utilizada en el análisis de curvas y superficies se puede aplicar a diversos temas geométricos, profundizando en la historia de las matemáticas y el dibujo y aplicando esos procesos a proyectos propios. También se dirige a asimilar y utilizar la potencia de la parametrización. Las herramientas matemáticas enlazan este conocimiento con el diseño paramétrico y con el cálculo de estructuras (Lastra Sedano, 2015). Manejar el modelado 3D mediante programas CAD permite adquirir competencias de uso de herramientas digitales muy valoradas en el ámbito profesional.

1.1. Ideación, cálculo y construcción. Control de la forma

El estudio de la geometría en obras de gran complejidad nos hace cuestionarnos el porqué del esfuerzo de diseño, cálculo y construcción que conllevan. Pensemos en ejemplos como la cubierta de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, de Torroja, o la del restaurante Los Manantiales, de Candela, o la del Hall del Cemento, de Maillart: ¿se podrían haber resuelto con una forma paralelepípedica, con unas láminas planas que cerraran ese espacio? ¿Con una solución cuyo control de la forma hubiese sido muy ventajoso, aparentemente? La respuesta en principio no es sencilla, pero basta con fijar un parámetro tan cuantificable como la cantidad de estructura y la conclusión es radicalmente n°. Sería imposible obtener las mismas luces, utilizando el mismo volumen de hormigón con una losa plana (no pretensada). La forma hace la estructura, y por tanto la geometría es parte esencial de la solución.

Por otro lado, observemos el ejemplo del Panteón de Agripa. Podríamos pensar en sentido opuesto: ¿si en lugar de proponer una bóveda semiesférica se hubiese construido medio elipsoide, apuntado en sentido vertical? De esa manera los empujes laterales hubiesen sido menores y la estructura se hubiese beneficiado de la forma adoptada. Desde un punto de vista presentista es un ejercicio estimulante trasladar la experiencia de las grandes catedrales

góticas o de la cúpula de Santa María de las Flores, de Brunelleschi, o ejemplos más recientes, al gran modelo romano. Sin embargo, no podemos dejar de ver que esta propuesta carece de sentido, pues el proyecto del Panteón no se entiende sin la fuerza conceptual de la esfera. Luego la geometría también es la idea de partida, que condiciona el resto del desarrollo poniendo a prueba los conocimientos físicos y constructivos de cada época.

La geometría arquitectónica estudia formas rotundas, pero también atiende a las sutilezas, a diferencias mínimas que configuran el comportamiento de una estructura o transforman radicalmente un proyecto. Por ejemplo, la onda que rigidiza la cubierta de los hangares de Orly, de Eugène Freyssinet, produce una sensación de orden y aporta escala monumental al edificio. O los lunetos adosados a la cúpula del Mercado de Algeciras, de Eduardo Torroja, que refuerza la lámina superior, aporta una sensación de ligereza, exhibiendo unos bordes extraordinariamente finos. Las servidumbres físicas o de uso que el objeto construido debe cumplir y que por tanto limitan las posibilidades de que el proyectista dispone, no suponen un demérito, sino un acicate que nos permiten poner en valor los logros alcanzados.

Estructuralmente es necesario aproximar el proyecto a un modelo identificable para poder abordar los problemas de equilibrio, resistencia o estabilidad. Es un ejemplo llamativo el análisis de la arquitectura gótica. Los edificios góticos se mantienen en pie, aunque sus constructores no conocían las

modernas teorías de cálculo de estructuras. Sin embargo, demostraron un conocimiento empírico del funcionamiento de las bóvedas. Es sabido que en muchas ocasiones se hacían varios intentos antes de encontrar el perfil adecuado para un nervio o una superficie. El moderno concepto de *coeficiente de seguridad* se puede equiparar a las antiguas reglas geométricas. Un arco de fábrica sometido a su propio peso tiene un espesor mínimo para albergar la línea de empujes. Si esa línea de empujes se sale de la fábrica aparecen tracciones y con ellas el riesgo de colapso (Heyman, 1999).

No menos importante es considerar que el replanteo del proyecto sobre el terreno requiere no sólo conocimientos de construcción sino a veces también del desarrollo intuitivo de soluciones que se ajusten a cada situación (Figura 1.2). El manejo de cuerdas, miras, plomadas o niveles no son en absoluto equivalentes a escuadras o compases que maneja el diseñador en su tablero de dibujo (actualmente sustituidos por programas de CAD). Por ejemplo, el replanteo en obra de una circunferencia se realiza normalmente con el uso de una cuerda anclada en un punto como centro de la figura. La elipse, sin embargo, necesita fijar dos puntos y unirlos con una cuerda de longitud conocida y mayor que la separación entre ambos. Se traza la figura sin más que deslizar el marcador manteniendo tensa la cuerda. Esto es lo que se llama *método del jardinero* (Izquierdo Asensi, 1985). Hay que advertir que la mayor facilidad que ofrece aproximarse a la elipse por medio de arcos de circunferencia hace que mu-



Figura 1.2. Semana de la Arquitectura UAH. 2015. Taller de arquitectura textil y de carpintería. Replanteo a tiza sobre el suelo de curvas cónicas, elipse (izquierda) y parábola (derecha). Imagen de los autores.

chos elementos tengan como trazado ideal la elipse, pero en realidad sean óvalos. Se considera generalmente que la intención se antepone al resultado. Por ejemplo, la planta del Coliseo de Roma parece una elipse, pero en realidad es un óvalo de 188 metros de eje mayor y 156 metros de eje menor.

Proyectar con geometría compleja requiere el conocimiento de las superficies y de sus curvas. Construir supone además diseñar el proceso de replanteo, marcar las referencias y las proyecciones sobre un plano, que requieren disponer de una superficie firme y permanente (solera de hormigón o similar) y de elementos de control vertical, asociados a muros, cimbras, o referencias cercanas, tales como otros edificios o construcciones auxiliares.

1.2. Objeto y herramienta

Hace apenas unas décadas el dibujo asistido por ordenador nos daba la posibilidad de llegar a la configuración de los objetos geométricos tridimensionales sin pasar por el sistema de representación tradicional. Como si de la fabricación de una maqueta se tratase, con un proceso de realización y transformación cada vez más ágil y versátil. El dibujante contemporáneo puede modelar el objeto directamente en tres dimensiones (Figura 1.3) o más allá incluso, puede definir las condiciones que debe cumplir y manejar las variables de los parámetros implicados, para que un *software* de visualización lo represente.

Una vez elaborado el modelo, la salida a dos dimensiones (en papel o pantalla) se puede realizar

eligiendo cualquier sistema de representación tradicional o incluso grabando en vídeo movimientos o transformaciones prácticamente inverosímiles hasta hace muy poco tiempo. Elegir entre mostrar distintos elementos en proyecciones ortogonales al uso o expresar la percepción del observador por medio de una perspectiva cónica, deja de tener un sentido excluyente. El dibujante tiene ambos momentos en sus manos simultáneamente.

En cuanto al trabajo en equipo y la posibilidad de que un modelo sea producto de la coordinación de varios operadores o sirva a distintos actores, son actos que están cada vez más presentes en el proceso de construcción y esto también lo facilitan los procesos digitales.

Debemos añadir que, para este proceso —que podemos denominar *geometría informática* o *modelado 3D*—, la geometría descriptiva es un complemento necesario: es la gramática imprescindible que el dibujante necesita para construir análisis fundamentados. Es un requisito necesario haber estudiado previamente la teoría de los sistemas de representación y las operaciones básicas del control de la forma, tales como pertenencia, abatimiento, perpendicularidad, verdadera magnitud, etc.

El modelado 3D, integrado con el cálculo paramétrico, ha transformado los límites de los sistemas de representación y ha hecho que la geometría descriptiva, establecida hace más de doscientos años, haya pasado a ser considerada una disciplina en evolución. La revisión de la teoría de esta ciencia con estas nuevas herramientas abre un panorama innovador para la docencia y la investigación (De Miguel Sánchez, Lastra Sedano y Castaño Perea, 2013).

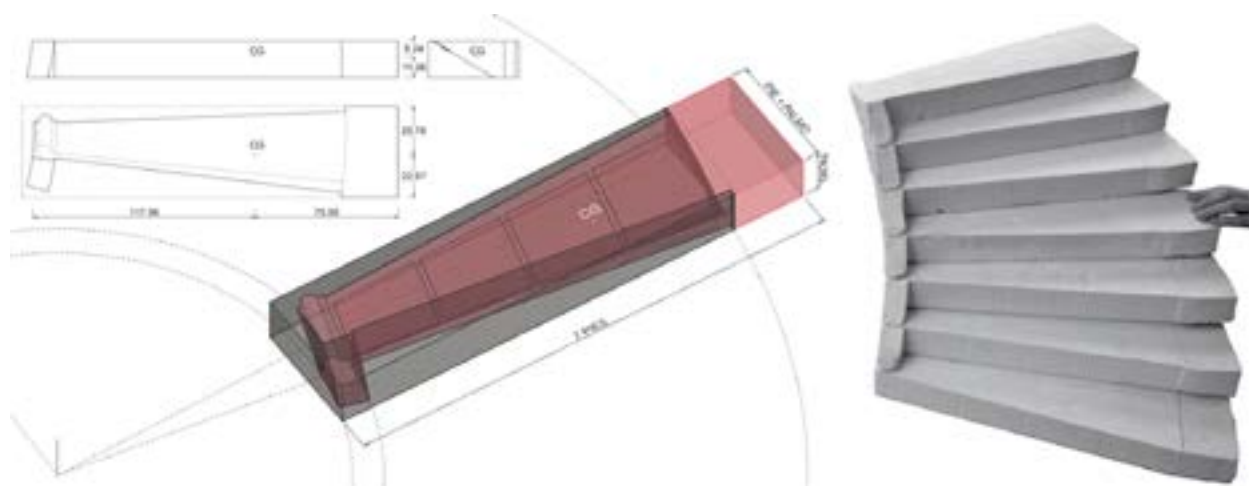


Figura 1.3. Peldaños de la escalera del Convento de Santo Domingo de Bonaval, Domingo de Andrade (ca. 1700). Ejemplo del uso de CAD y CNC para la realización de un modelo a escala en yeso (Cabo, Uriel y de Miguel, 2017).

1.3. Curvas cónicas

Los primeros textos de los que se tiene noticia sobre estas curvas son los cuatro libros de Euclides llamados *Secciones cónicas* (ca. 300 a. C.) desaparecidos. Este trabajo fue retomado y ampliado por Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.) que escribió *Cónicas*. Esta obra constaba de ocho libros. Los cuatro primeros se han conservado, los tres siguientes se transmitieron por su traducción al árabe y el octavo se ha perdido. El origen de los términos «elipse», «hipérbola» y «parábola» adoptados por Apolonio significan respectivamente deficiencia, exceso y equiparación.

Si rastreamos la presencia de las curvas cónicas en textos relacionados con la arquitectura, comprobamos que en los libros de Vitruvio la única cónica que se menciona es la circunferencia. En el tratado de Alberti, *De Pictura* (ca. 1435), se representa la elipse como proyección perspectiva de la circunferencia. En el de Piero de la Francesca, *De Prospectiva Pingendi* (ca. 1474), podemos comprobar que la definición de la elipse es una aproximación por puntos. Durero, en su Libro I (1525) sí

explica la forma de alargar un semicírculo y convertirlo en media elipse, por división en partes del rectángulo circunscrito. Es en el libro primero del tratado de Serlio *Siete Libros de Arquitectura* (1537), en el que aparece el método de transformación de la circunferencia en elipse.

Una de las formas de definir una cónica es como curva algebraica, siendo los puntos del plano euclídeo que verifican un polinomio de segundo grado. Son conocidas como *cónicas* porque se producen por distintas intersecciones de un plano con un cono (Figura 1.4). Según el ángulo de corte, tendremos la hipérbola, la parábola, la elipse y la circunferencia (en realidad, un caso particular de la elipse). Otro punto de vista para su generación es también como lugar geométrico, en el que no ahondaremos. Las cónicas responden a una ecuación de segundo grado de la forma siguiente:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Las transformaciones ortogonales en el plano euclídeo permiten determinar una clasificación de estas a partir de su representación matricial, me-

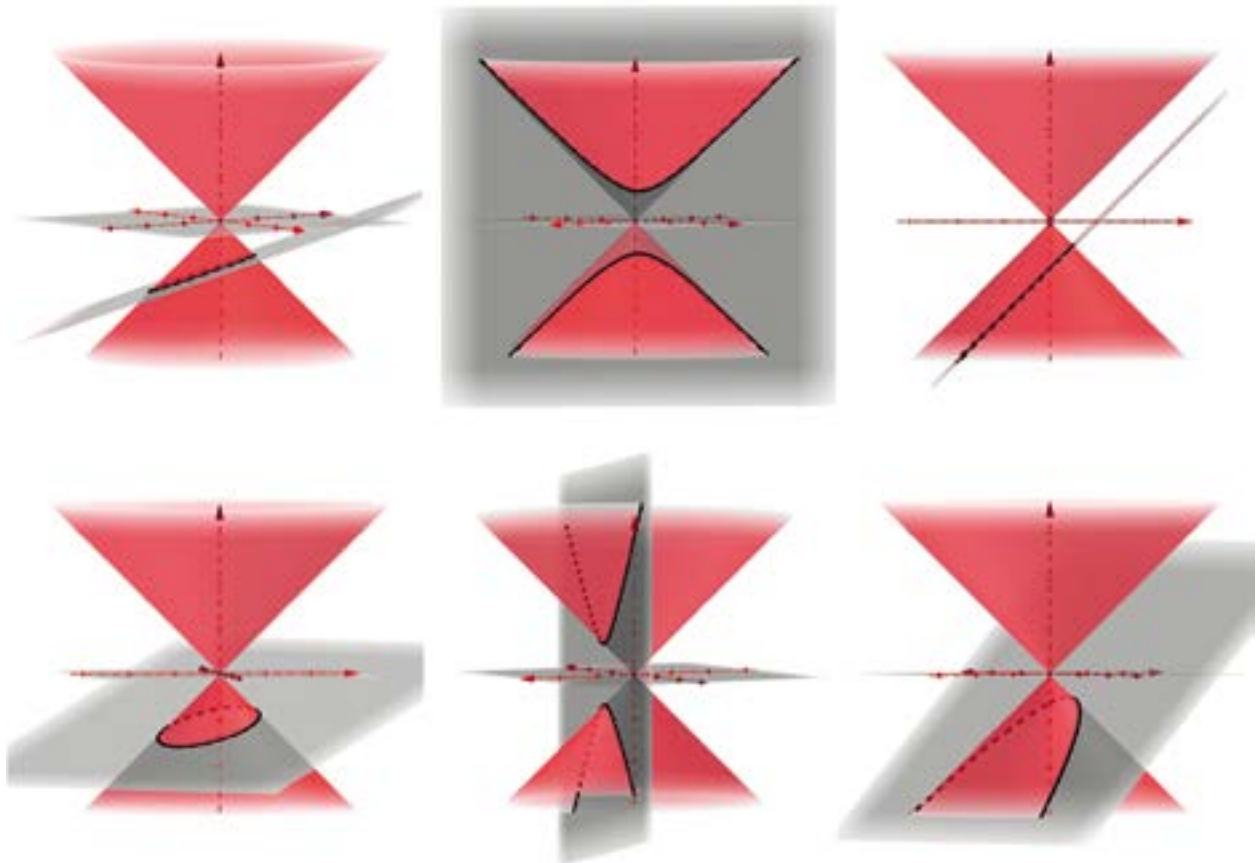


Figura 1.4. Cónicas como secciones de un cono con un plano. Cónicas no degeneradas. Tanto en fila superior como inferior y de izquierda a derecha: elipse, hipérbola, parábola. Elaboración propia.

diente elementos invariantes mediante movimientos rígidos. Así, si bien usualmente se asocia al concepto de cónica las figuras de elipse, hipérbola o parábola, desde este punto de vista aparecen otras cónicas como la elipse imaginaria, dotada de dicha notación por su semejanza en cuanto a la formulación respecto a la elipse real, pero sin contener puntos reales. También serán cónicas, en este caso reducibles ya que el polinomio de segundo grado que define la cónica

puede factorizarse, pares de rectas bien secantes, bien paralelas (reales o imaginarias) o rectas coincidentes (Figura 1.5). En el caso de rectas imaginarias paralelas no se alcanza a ver ningún punto, mientras que para las rectas secantes imaginarias, a la vista la cónica quedará reducida a un único punto. Para un mayor detalle al respecto, el lector interesado puede consultar los textos (Lastra Sedano, 2021), Cap. 1.4 y (Burgos Román, 2006), entre otros.

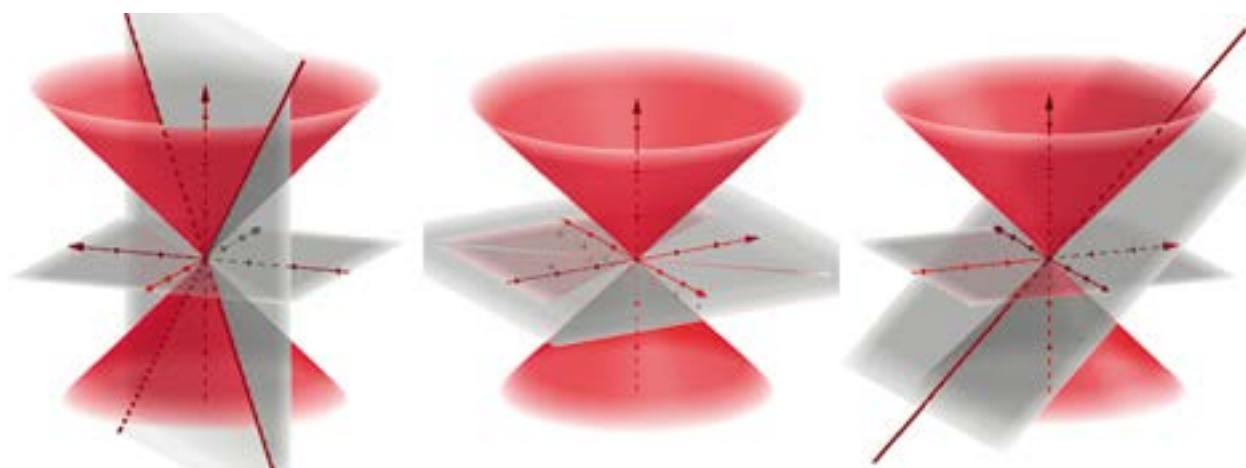


Figura 1.5. Cónicas como secciones de un cono con un plano. Cónicas degeneradas. De izquierda a derecha: par de rectas secantes, par de rectas secantes imaginarias, recta doble. Elaboración propia.

Las secciones cónicas poseen unas propiedades interesantes. En la sección de la elipse de la Figura 1.6 se aprecia cómo los focos de esta son los puntos de tangencia de las esferas inscritas de centro O y O' . La distancia FA es igual a $F'A'$ y coincide con BA . Análogamente FA' es igual a $F'A$ y coincide con AB' , por tanto, el eje mayor de la elipse AA'

es igual al segmento de generatriz BB' . En la sección de la parábola, el foco de esta es también el punto de tangencia del plano con la esfera inscrita y la directriz de la parábola está en el plano de contacto de esfera y cono. En el caso de la hipérbola, los focos también son los puntos de tangencia de las esferas inscritas.

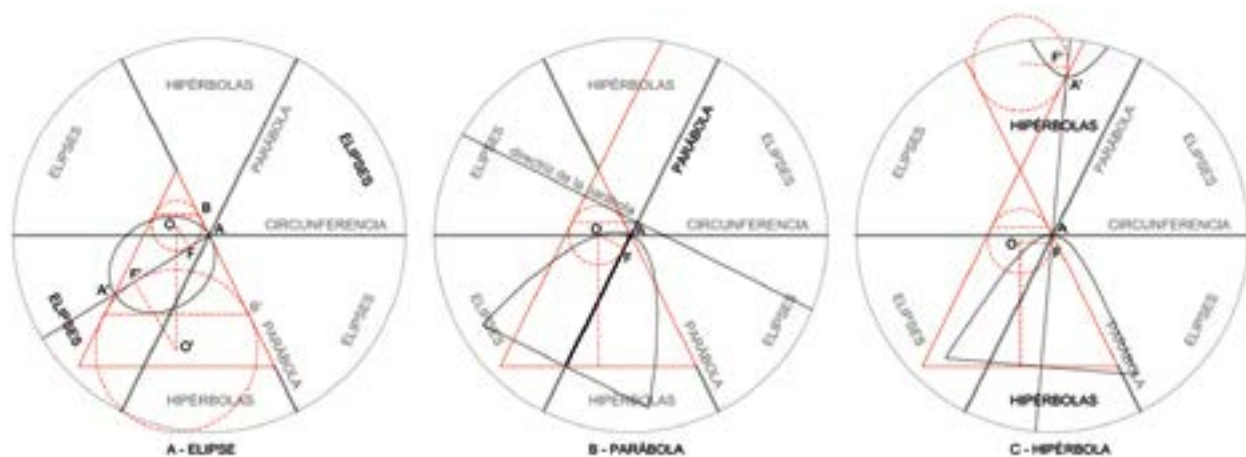


Figura 1.6. Esquema de secciones cónicas. Elaboración propia.

Circunferencia.¹ Se define por la constante radio o distancia desde cualquiera de sus puntos a un punto único o centro. Una cónica propia es una elipse si su excentricidad es menor que 1: $e < 1$. Cuando $e = 0$ la elipse es una circunferencia. La excentricidad en una cónica no degenerada queda definida por el valor constante determinado por el cociente entre las distancias de uno de sus puntos a los focos y la distancia de dicho punto a las directrices. Este elemento puede describirse en términos de la distancia entre focos de una elipse, de forma que para una elipse la excentricidad mide lo que ésta se aleja de la circularidad. En la circunferencia los dos focos se confunden y son a su vez el centro de la cónica.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Claramente, una circunferencia resulta ser un caso particular de una elipse para la que los ejes mayor y menor coinciden. Desde el punto de vista de su clasificación, mediante el uso de invariantes matriciales, una circunferencia viene asociada a una matriz reducida para la cual los coeficientes en los términos cuadráticos coinciden, siendo $-r^2$ el valor del término independiente.



Figura 1.7. Castro de Baroña, siglo I a. C., A Coruña. Imagen propia.

Podemos afirmar que la circunferencia es la curva fundamental en la historia de la arquitectura. Es símbolo de plenitud y perfección. Las estructuras de planta circular son frecuentes en los restos de construcciones prehistóricas (Figura 1.7), desde monumentos funerarios como los tholos micénicos o en estructuras megalíticas, como la de Stonehenge

(Figura 1.8), pero también forman parte de refugios y viviendas primitivos, como las de los castros celtas. La circunferencia también aparece en el trazado de arcos y bóvedas de todo tipo.

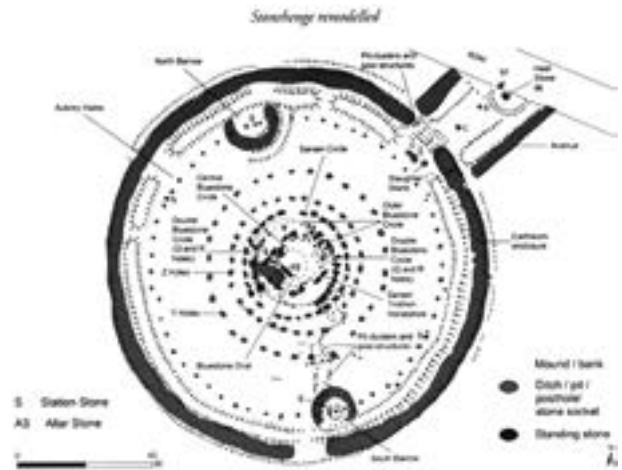


Figura 1.8. Planta de Stonehenge, ca. 3000 a. C. Condado de Wiltshire, Inglaterra (Darvill, 2012).

Elipse. La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados *focos*, es constante e igual a la longitud del eje mayor.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Desde el punto de vista matricial, una elipse puede reducir su ecuación tras movimientos rígidos hasta quedar representada por una matriz diagonal en la que las longitudes de los ejes vienen descritos en términos de los coeficientes de los términos cuadráticos. El sistema de coordenadas en el que una elipse tiene esta ecuación viene descrito por el centro de coordenadas definido por el centro de la elipse, y siendo los ejes de coordenadas rectas de vector de dirección dado por autovectores asociados a la matriz de términos cuadráticos de la cónica. Al ser una matriz simétrica, esta es diagonalizable, y por el hecho de ser una elipse, los autovalores son ambos de mismo signo, y dando lugar a direcciones ortogonales.

La *primera ley de Kepler* establece que los planetas describen órbitas elípticas, con el sol situado en uno de sus focos. Dicha ley también se aplica a otros pequeños cuerpos del sistema solar llamados *planetas menores* o *asteroides*. Podemos encontrar la elipse en ejemplos importantes de la arquitectura histórica. Pensemos en el pavimento elíptico de la plaza del Campidoglio de Miguel Ángel (Figura 1.9), en Roma, que recurre a esta figura

1. Todas las ecuaciones que se incluyen son obtenidas tras realizar una transformación rígida (traslación y giro) en el plano.



Figura 1.9. Campidoglio, Roma, Miguel Ángel (1538).
Fuente: Grabado Étienne Dupérac (ca. 1560).

para convertir un espacio público de planta trapezoidal en una plaza dinámica y envolvente. En la plaza de San Pedro del Vaticano construida entre 1656-1667, Bernini marca los focos geométricos con fuentes. Es interesante cómo esta figura puede atrapar el espacio en torno suyo. También se encuentra en las bóvedas de arista, que presentan dos elipses en las diagonales, al ser cortes oblicuos a los ejes de los cilindros. Muchos espacios barrocos se han visto impregnados del dinamismo que genera la elipse tanto en edificios como en plazas o jardines. Por otro lado, hay que advertir que algunas formas que parecen elipses son en realidad óvalos, curvas que están compuestas por arcos de circunferencia. Estas figuras han tenido una gran aplicación en la arquitectura histórica por su facilidad para adaptarse a cualquier proporción (López Mozo, 2011).

Parábola. La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (el foco) y una recta dada (la directriz) (Figura 1.10).

$$y^2 = 2px$$

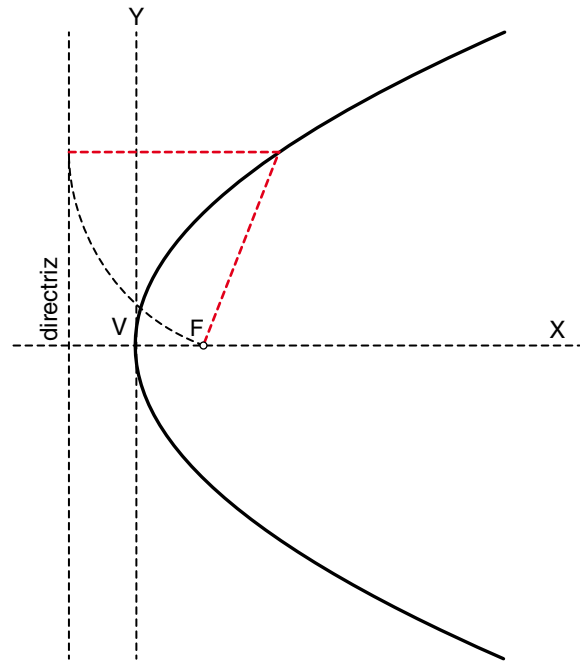


Figura 1.10. Parábola. Las distancias desde un punto de la curva al foco y a la directriz son iguales. Elaboración propia.

La caracterización de una parábola en términos de su representación matricial se basa en tener su determinante no nulo (al ser una cónica no degenerada), pero además ser nulo uno de los autovalores asociados a la matriz de términos cuadráticos. El otro autovalor se encuentra asociado a la dirección del eje de simetría de la parábola a través del espacio de autovectores asociados.

La parábola es la forma propia del puente suspendido (Figura 1.11 y Figura 1.12). A diferencia de la catenaria, que se cuelga de dos puntos y soporta su propio peso, la parábola se acomoda mejor a la carga distribuida uniformemente en horizontal. La diferencia entre ambas es pequeña visualmente, pero tiene una importancia notable en materias estructural y geométrica.

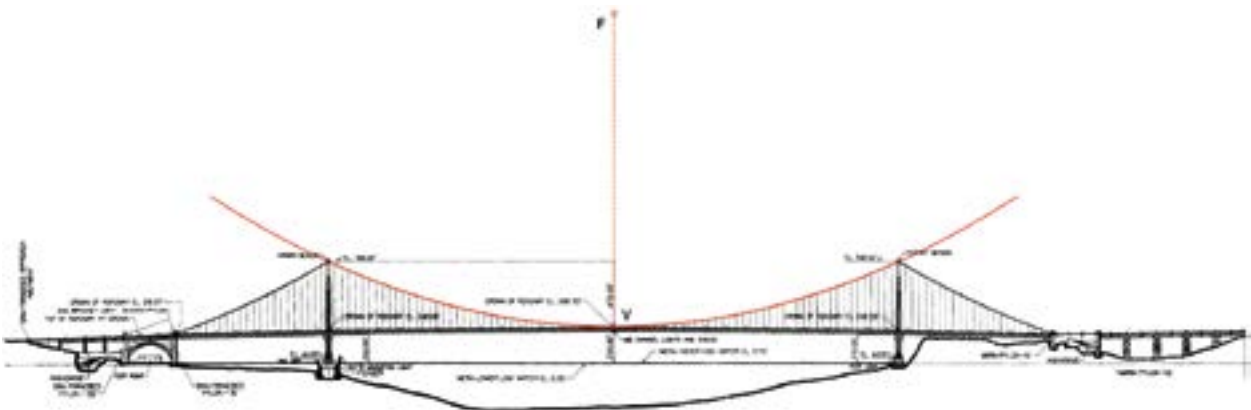


Figura 1.11. Joseph Strauss, alzado del puente Golden Gate de San Francisco, 1937.

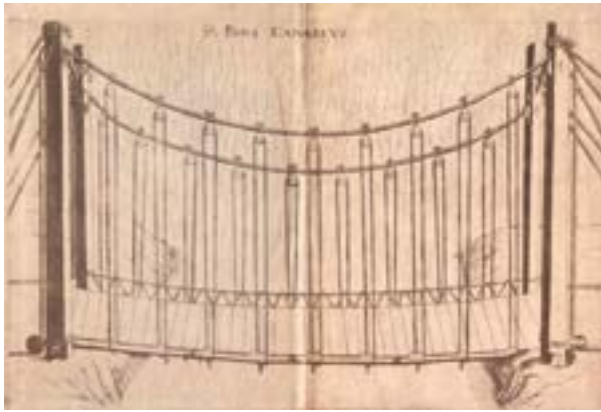


Figura 1.12. Puente colgante por Fausto Verazio, ca. 1600. Es considerado el primer dibujo de un puente colgante.

Hipérbola. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante (Figura 1.13). La distancia entre los vértices también coincide con esa diferencia. Otra propiedad importante es que la intersección entre tangente a un vértice y una asíntota nos da un punto cuya distancia al centro es igual a la que existen entre centro y foco. Si bien la excentricidad de una circunferencia es nula, y en una elipse se encuentra entre 0 y 1, la excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

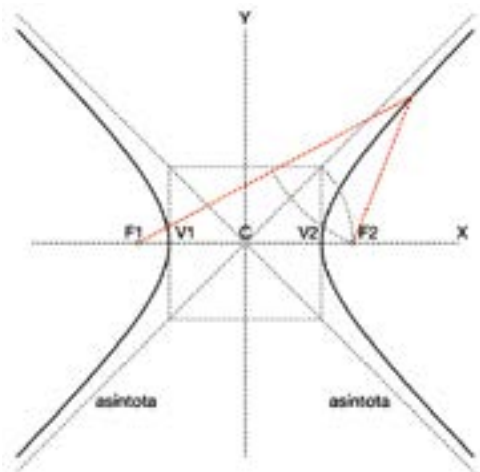


Figura 1.13. Hipérbola equilátera. La diferencia entre las distancias desde un punto de la curva a cada foco es una constante. Elaboración propia.

Matricialmente, la hipérbola es exactamente equivalente a una elipse, salvo por el hecho de que los autovalores asociados a la matriz de términos

cuadráticos tienen distinto signo, de forma que las transformaciones rígidas (giros y traslaciones) permiten escribirla en la forma reducida que se acaba de exponer. De nuevo, los ejes quedarán determinados por las direcciones de autovectores asociados a dicha matriz de términos cuadráticos.

Esta curva se asocia a la superficie hiperboloi-de hiperbólico, y es una forma habitual en la sección de construcciones como depósitos, torres de control, faros, etc., por su gran estabilidad (Figura 1.14). Autores como Vladimir Shújov, Eduardo Torroja, Oscar Niemeyer, etc., han utilizado esta curva para diseñar algunos de sus proyectos.

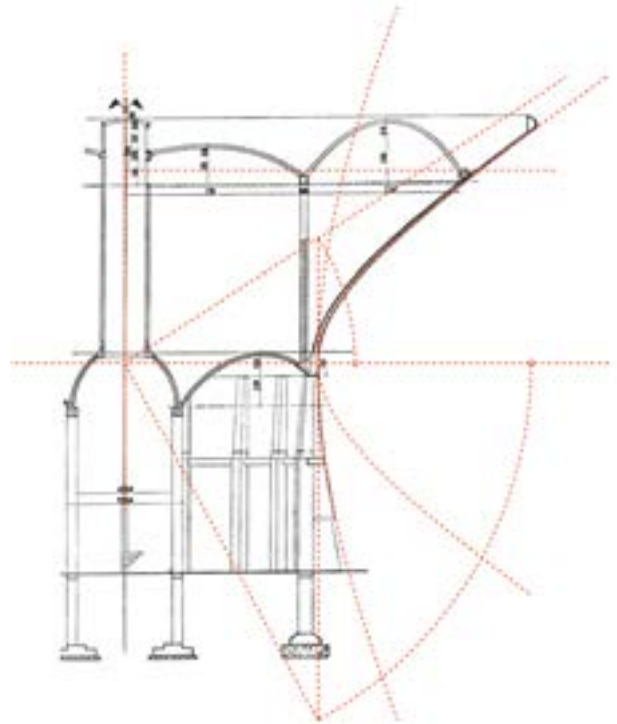


Figura 1.14. Sección de la Cuba de Fedala. Eduardo Torroja. Elaboración propia.

1.4. Otras curvas planas en arquitectura

Catenaria. De aspecto muy parecido a la parábola, es la forma que adopta una cadena, sujeta por sus extremos, por ello los arcos catenarios son los que mejor se ajustan a las estructuras sometidas principalmente a peso propio (Figura 1.15). Cuando revolucionan estas entidades generan catenoides, superficies que también tienen cierta relevancia en arquitectura. La Sagrada Familia de Gaudí, algunas cubiertas del ingeniero Heinz Isler, etc.

$$y = a \cosh \frac{x}{a} = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$$

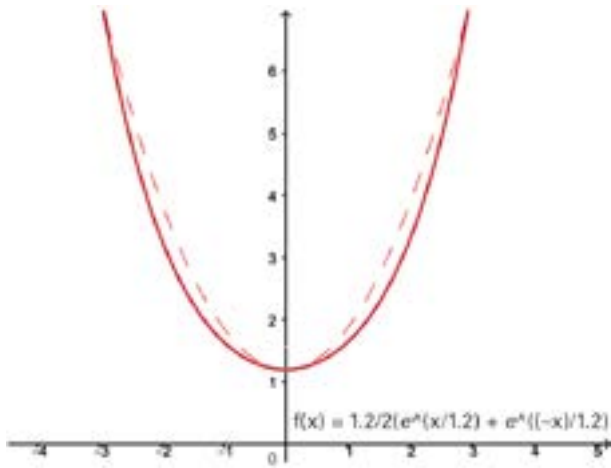


Figura 1.15. Catenaria. Curva asimilada a una cadena colgada por sus extremos. Se superpone una parábola (línea discontinua) para comparar las formas. Imagen de los autores.

Cicloide. Es una curva que describe el movimiento de un punto que pertenece a una circunferencia cuando esta rueda sobre otra curva. Es bien conoci-

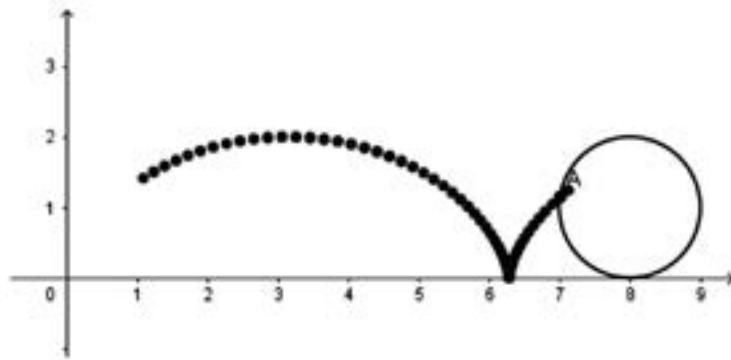


Figura 1.16. Izquierda: curva cicloide $r = 1$. Descrita por un punto de una circunferencia al rodar. Imagen de los autores.

Derecha: Museo Kimbell, Fort Worth, Texas, Louis Kahn, 1972. Las cubiertas siguen la forma de la curva cicloide.

De Carol M. Highsmith. Dominio público, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31402682>.

La manera de alcanzar la parametrización anterior de una cicloide es sencilla, conociendo las reglas a partir de las que se construye. Así, si suponemos que la posición inicial de la circunferencia que rueda viene dada por la ecuación de una circunferencia centrada en el punto $(0, r)$, de radio r y hacemos mover el punto fijo en la circunferencia en el sentido horario dentro de esta durante unidades, tendremos que la longitud de arco vendrá dada por $r\alpha$, de donde $\alpha = s/r$. Por tanto, si el ángulo inicial del punto es $-\pi/2$, tras un tiempo será de $-\frac{\pi}{2} - s$, por lo que la posición del punto será:

$$\left[s + r \cos\left(-\frac{s}{r} - \frac{\pi}{2}\right), r \sin\left(-\frac{s}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

do el caso de la cubierta del Museo de Arte Kimbell, de Louis Kahn, que está formada por una serie de cilindros cuya directriz es esta curva (Figura 1.16).

$$x = r \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2}$$

Una parametrización de una cicloide viene dada por

$$[x(t), y(t)] = [r[t - \sin(t)], r[1 - \cos(t)]]$$

Es importante observar que una cicloide no es una curva regular en su totalidad, ya que posee puntos singulares producidos al completar una vuelta la circunferencia que gira, cuando el punto fijado toca el suelo. En este momento, la curva no admite vector velocidad no nulo, por lo que no se puede definir una recta tangente de forma adecuada. Obsérvese de la parametrización que el vector derivada se anula para los múltiplos enteros de $2\pi r$.

Las fórmulas trigonométricas usuales permiten concluir la parametrización dada de la cicloide.

Lemniscata. También conocida como *lemniscata de Bernoulli*, aunque mucho menos frecuente esta curva aparece en el diseño de la Costilla Laminar de la Fundación Eduardo Torroja, en Madrid (Figura 1.17).

$$(x^2 + y^2)^2 = 2d^2(x^2 - y^2)$$

Vista como lugar geométrico, una lemniscata se obtiene disponiendo aquellos puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos, los focos de la lemniscata, de manera constante. También, una

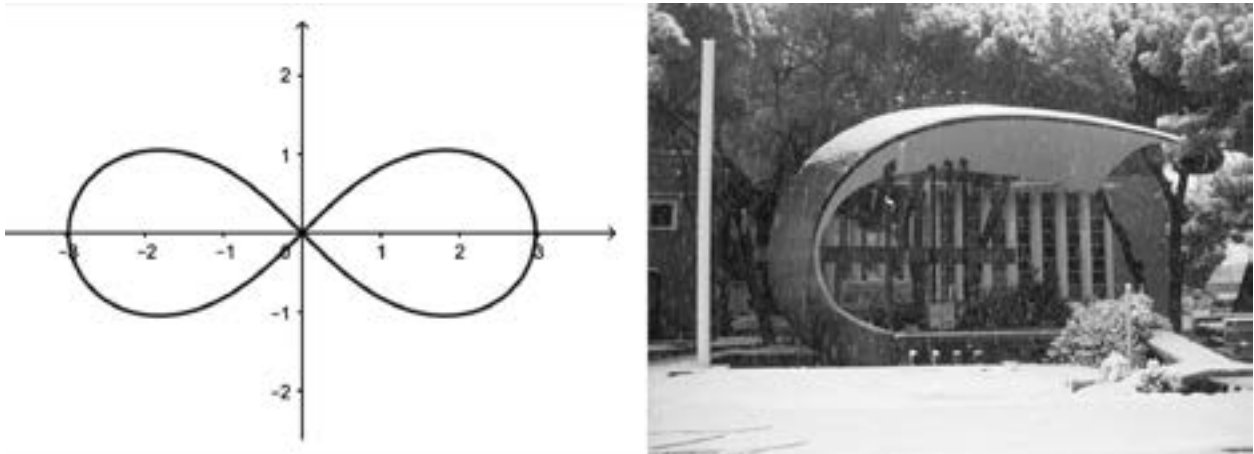


Figura 1.17. Izquierda: curva lemniscata. Imagen de los autores. Derecha: capilla del Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, 1969 (Echevarría, Garnica y Gutiérrez, 2014.)

lemniscata puede construirse siguiendo una construcción de similar naturaleza al de una cicloide. Así, una lemniscata puede describirse viendo la trayectoria que dibuja el centro de una hipérbola que gira alrededor de otra hipérbola exactamente igual. También puede describirse a partir de ciertas secciones en algunos toros particulares.

Una parametrización de la curva viene dada por:

$$[x(t), y(t)] = \left[\frac{d \cos(t) \sqrt{2}}{\sin(t)^2 + 1}, \frac{d \cos(t) \sin(t) \sqrt{2}}{\sin(t)^2 + 1} \right]$$

para cualquier valor real del parámetro.

Espiral. Destaca la espiral logarítmica, que suele aparecer asociada a la perspectiva (Figura 1.18). Concretamente, la espiral logarítmica surge de la proyección ortogonal de una hélice circular desde una proyección ortogonal a su eje. Una parametrización de este tipo de curvas viene definida por:

$$[x(t), y(t)] = [a \exp(bt) \cos(t), a \exp(bt) \sin(t)]$$

para cualquier valor del parámetro. Obsérvese que el módulo del valor de determina la escala de la espiral, mientras que su signo está asociado a su sentido de giro. Por otro lado, el parámetro b mide la separación entre dos giros consecutivos de la espiral.



Figura 1.18. Espiral logarítmica. La triple escalera de caracol del convento de Santo Domingo de Bonaval, Santiago de Compostela. Imagen de los autores.

1.5. Curvas alabeadas

Hélice. Puede ser hélice cilíndrica, cónica esférica, etc. Su presencia en la historia de la arquitectura se asocia al trazado de escaleras de caracol, formando superficies helicoidales, aunque también es un motivo decorativo, como en la Columna de Trajano. Del mismo modo se puede encontrar en forma de curva alabeada alrededor de distintas

superficies, como en el caso del minarete de la Mezquita de Samarra, que describe una hélice cónica y en la cúpula de una sola hilada de la escalera del monasterio de Santa Catalina en Talavera de la Reina (Toledo) que es una hélice esférica (Figura 1.19).

$$x = \frac{Ra^2}{R^2a^2 + 1}$$



Figura 1.19. Hélices sobre cilindro, cono y esfera. Izquierda: Columna de Trajano, 113 d. C. (imagen de Olivier Giboulot, licencia Unsplash, <https://unsplash.com/es/fotos/FpZ0spMtetc>). Centro: minarete de la Mezquita de Samarra, 851 d. C. (imagen de Safa Daneshvar, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:001124-MalwiyaMosque-Samerra-IMG_7824-2.jpg, Wikimedia Commons). Derecha: Monasterio de Santa Catalina, Toledo, siglo xvi. Imagen de los autores.

Las hélices son, sin duda, la curva alabeada con más presencia en arquitectura. Por lo general, una hélice puede describirse paramétricamente por la parametrización:

$$[x(t), y(t), z(t)] = [r(t) \cos(t), s(t) \sin(t), h(t)]$$

donde $r(t)$, $s(t)$ son funciones que describen en planta la figura que va describiendo la hélice, y donde $h(t)$ mide la altura a la que se dibuja esta. Como puede verse a partir de la parametrización presentada, una hélice tiene una relación muy estrecha con las coordenadas cilíndricas. En el caso de hélices cilíndricas, $r(t) = s(t)$ son constantes iguales al valor del radio de la circunferencia que se describe en planta, mientras que $h(t)$ es la función $h(t) = t$. Cuando la hélice tiene una base elíptica, $r(t)$ y $s(t)$ siguen siendo constantes, y su valor coincide con la medida de los semiejes de la elipse que se dibuja. Al variar $h(t)$ se modifican los elementos asociados a la altura a la que se dibuja la hélice. Así, una función $h(t)$ con derivada positiva y creciente dibujará una

hélice con velocidad de crecimiento en altura cada vez mayor.

Cuárticas. Las intersecciones entre superficies a menudo producen curvas de cuarto grado. Tal es el caso de los bordes de los lunetos que completan las bóvedas (Figura 1.20). En general, si se interseccionan dos superficies, como las cuádricas (y no cum-

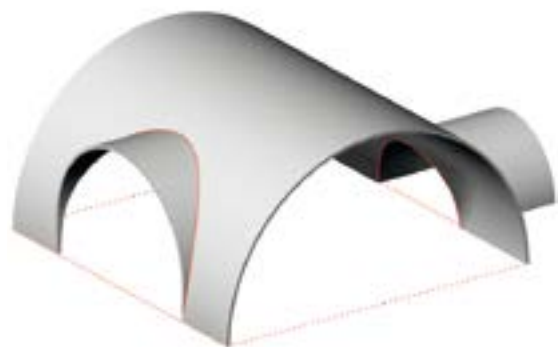


Figura 1.20. Modelo teórico de bóveda de cañón con lunetos. Las curvas intersección entre cilindros de distinto radio son curvas cuárticas. Por los autores.

plen la condición de ser bitangentes, en cuyo caso la intersección se compone de dos cónicas) las entidades resultantes van a ser curvas alabeadas.

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

1.6. Superficies cuádricas y formas libres

Las cuádricas son la generalización, al espacio, de las cónicas. Entre ellas tenemos las cuádricas de revolución, como el elipsoide, el hiperboloide de una hoja, el hiperboloide de revolución y el paraboloide de revolución o elíptico. También está el paraboloide hiperbólico que es radiada, como el hiperboloide de una hoja, el cono y el cilindro, pero a diferencia de estas, no es de revolución. De modo que, dentro de las cuádricas, como en otras superficies, la clasificación de superficies se presta a diferentes agrupaciones, bien por su generación, ejes, directrices, planos o conos directores, etc.

José María Ruiz Aizpiri (1972) subrayaba que «las formas parabólico-hiperbólicas han experimentado un desarrollo espectacular en el campo laminar, pero en general, el trazado de superficies regladas no ha agotado aún sus grandes posibilidades geométricas», y explica que la falta de interés hacia el estudio de la geometría se debe a que no se ha enfocado desde un punto de vista plástico. Tradicionalmente se ha puesto la atención en la resolución de problemas de formas con pocos grados de libertad; en cambio, se descuida el estudio de superficies cuyas posibilidades compositivas están muy lejos de agotarse.

Especialmente interesantes por sus cualidades estructurales son las superficies de doble curvatura y entre ellas las de segundo grado (cuádricas) por ser sus ecuaciones más sencillas y más fácil su encofrado. Las dos superficies que cumplen las condiciones de ser alabeadas y de segundo grado son paraboloides e hiperboloides y por ello están entre las más empleadas en las cáscaras de hormigón.

El hiperboloide contiene a las tres clases de cónicas, elipse, parábola e hipérbola, mientras el paraboloide solo contiene dos cónicas, parábolas e hipérbolas. Para Aizpiri «son tan sumamente variadas las disposiciones que se pueden obtener con las superficies de segundo grado, que siempre es posible obtener formas originales» (Ruiz Aizpiri, 1972).

Limitaciones como la estructural o la constructiva también están vinculadas a la geometría. Frente a las llamadas *formas libres* supuestamente liberadas de la geometría, aclara Aizpiri (1972) que esta disciplina no impone limitación alguna, sino que in-

vestiga las propiedades de la forma y nos descubre las posibilidades que una forma va a alcanzar cuando está destinada a ser construida.

De forma análoga a las cónicas, las cuádricas resultan ser la manifestación de los ceros de polinomios de segundo grado, en este caso, de polinomios en tres variables. Por tanto, todas las cuádricas pueden representarse a través de una matriz, que las identifica unívocamente, y que permite calcular sus elementos más característicos de forma rápida y organizada. La teoría asociada a las transformaciones ortogonales en el espacio permite determinar un sistema de referencia en el espacio que hace que la cuádrica tenga una expresión lo más amigable posible. Esta expresión es la que se mostrará en cada uno de los casos subsiguientes, aunque podría tener una ecuación mucho más complicada, en un sistema de referencia cualquiera.

El teorema espectral permitirá reescribir la matriz asociada a los términos cuadráticos de la matriz de la cuádrica en forma diagonal (al ser una matriz simétrica, y por tanto diagonalizable en el cuerpo de los reales), por lo que el estudio de clasificación de cuádricas se reduce al de elementos invariantes por transformaciones rígidas en el espacio en superficies definidas implícitamente en la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

para valores reales $a, \dots, g$. Los invariantes se encuentran en la invariabilidad del polinomio característico asociado a la matriz de la cuádrica, y en particular a sus coeficientes (determinante, signatura de ciertas submatrices, rangos, etc.). Aunque solo se hará un estudio de las cuádricas presentes en el contexto arquitectónico resulta interesante señalar que, además de elipsoides, hiperboloides y paraboloides, entre este tipo de superficies se encuentran también conos, cilindros y combinaciones de planos en distintas posiciones.

Elipsoide. Algunas cúpulas elípticas presentan una planta circular y su sección es una elipse. Un ejemplo es la cúpula del Reichstag, de Norman Foster (Figura 1.21, Figura 1.22) o la bóveda del Palacio Güell, de Gaudí (Figura 1.23). Otras cúpulas tienen una planta elíptica, pero en sección pueden ser semicirculares, en cuyo caso será también de revolución. Muchas cúpulas barrocas siguen ese esquema. En esta superficie es importante tener en cuenta que los cortes a distintas alturas dan elipses concéntricas, pero estas no son curvas paralelas, lo cual complica mucho el trazado de este tipo de bóvedas.



Figura 1.21. Izquierda: Elipsoide. Derecha: Cúpula del Reichstag, Norman Foster, 1999 (imagen de Christian Lue, <https://unsplash.com/es/fotos/seWsl9kjkW8>, Licencia Unsplash). Es una estructura metálica cuyos meridianos tienen forma elíptica, que se unen en un anillo en la parte superior.

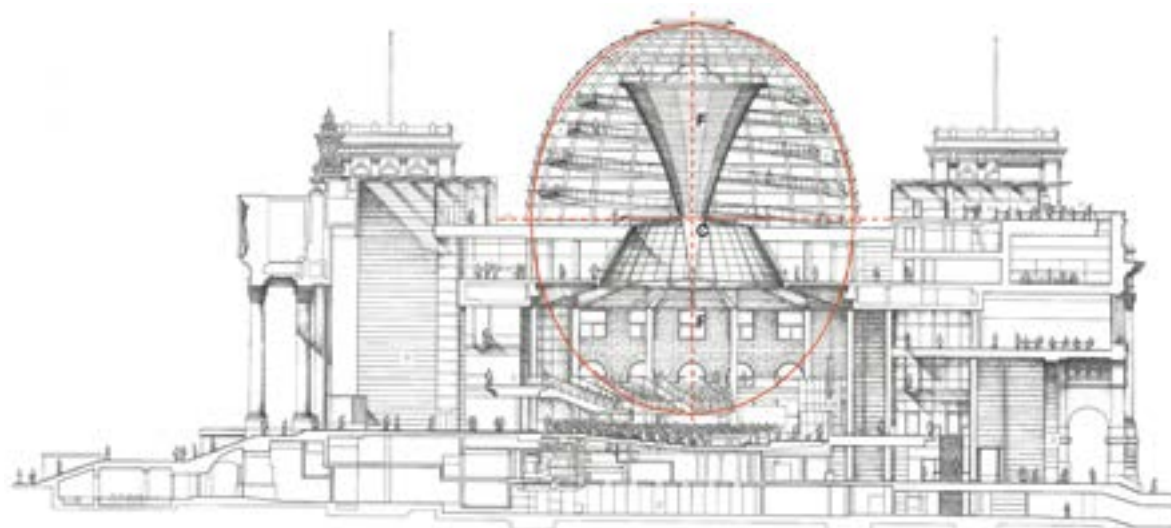


Figura 1.22. Reichstag, Norman Foster, 1999. Elipse dibujada por los autores sobre sección (Davey, 1999).

La formulación reducida que presentamos se da en el sistema ortonormal para el que el centro de coordenadas se sitúa en el centro del elipsoide, y siendo los ejes coordenados determinados por las rectas por el centro y de dirección los autovectores de la matriz asociada a los términos cuadráticos de la matriz asociada. En ella, es sencillo comprobar que las proyecciones sobre los planos coordenados de la cuádrica son siempre elipses, sin más que anular los valores de cada una de las variables. De esta forma, tenemos también garantizada la medida de cada uno de los semiejes.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esfera. Es una entidad definida por una constante distancia desde un punto central a toda la superficie. Esto caracteriza los espacios por su centralidad, por generar un polo que domina toda la composición. El caso paradigmático es el Panteón de Agripa, en Roma, que alberga una esfera en su interior, tangente al suelo y cuya mitad superior forma la cúpula. También existen muchos otros casos de superficies esféricas y vaídas que utilizan esta entidad. En la arquitectura renacentista muchas cúpulas en España siguieron el camino marcado por la del Escorial, mostrando la semiesfera tanto al interior como al exterior (López-Mozo, 2013).

En la arquitectura moderna encontramos casos como el Primer Goetheanum, la cúpula de Dischin-

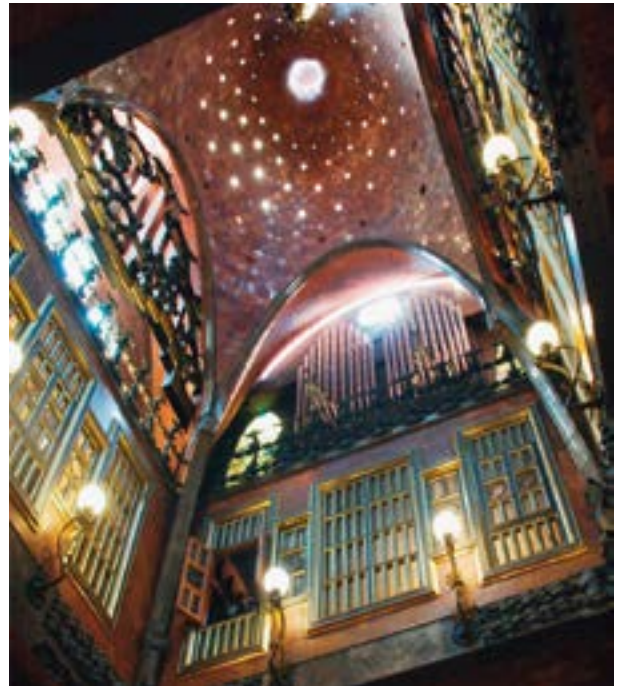
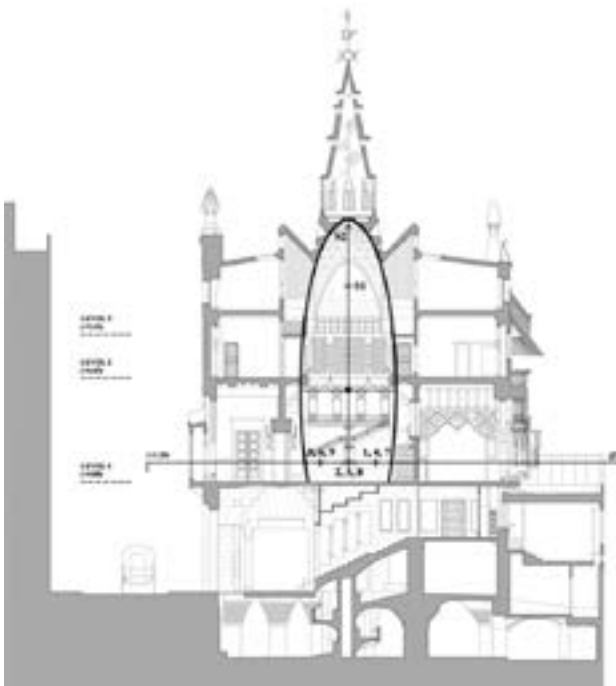


Figura 1.23. Palacio Güell, Antonio Gaudí, 1885. El salón central dedicado a la música presenta una cúpula de forma elíptica (González, G., Samper y Herrera, 2021).

ger para el Planetario de Jena, el mercado de Algeciras, de Eduardo Torroja o el Palacio de los Deportes de Candela. También existen edificios que utilizan triángulos esféricos, como el Auditorio Kresge, de

Eero Saarinen o la Ópera de Sydney, de Jorn Utzon (Figura 1.24, Figura 1. 25).

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$



Figura 1.24. Izquierda: Primer Goetheanum, Rudolf Steiner, 1914. Fotografía de la cimbra. La cubierta muestra dos esferas en madera, cuya intersección es una circunferencia (Kiuntzli et al., 2020). Centro: Planetario Zeiss de Jena, Franz Dischinger, 1926. Fotografía de la armadura de la lámina de hormigón. La disposición de las barras forma una cúpula geodésica (Hines, 2004). Derecha: Mercado de Algeciras, Eduardo Torroja, 1933. Cubierta formada por un casquete esférico y lunetos cilíndricos de eje horizontal (Torroja, E., 1962c).



Figura 1.25. Izquierda: Palacio de los Deportes, Félix Candela, 1968. De una superficie esférica se toman meridianos en dos direcciones que se cierran con hiperboloides hiperbólicos (Candela Outeriño, Peyri Macía y Castañeda Tamborrell, 1968). Derecha: Comparativa de la evolución de la forma de las cubiertas de la Ópera de Sydney, 1973 (Rey-Rey, 2014). Las cubiertas están concebidas como triángulos esféricos, aunque no funcionan como una cáscara, sino como la suma de nervios en abanico.

Una esfera, como caso particular de un elipsoide para el que sus ejes comparten medida, no es distinguible de otro elipsoide desde el punto de vista de la clasificación, siendo el determinante de la matriz de la cuádrica negativo, y todos los autovalores de la matriz asociada a los términos cuadráticos todos del mismo signo.

Cono. Es una superficie reglada, cuádrica y desarrollable. En la arquitectura tradicional se encuentra en troneras, lunetos, capialzados, algunas cubiertas de torreones y cubiertas de bóvedas, como la hoja

exterior del Panteón de Roma en las que el casquete superior se acerca a la forma de la hoja interior y según se aproxima a los bordes del anillo la cubierta se convierte en un cono recto. O en el trazado de las hiladas redondas de las bóvedas de cantería. El carácter de superficie desarrollable permite el uso de láminas semirrígidas para dar forma a estructuras como el pabellón Caterpillar, de Roberto Narváez y Andrés Martín-Pastor (Figura 1.26).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Figura 1.26. Izquierda: auditorio de la Escuela Nacional de Ciencias Químicas, Ciudad Universitaria, México, Félix Candela, 1952 (Faber, 1970). Derecha: pabellón Caterpillar, Roberto Narváez y Andrés Martín-Pastor, 2014. Conos de tablero de fibra de madera. Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Edificación. Universidad de Sevilla (Martín-Pastor, García-Alvarado, 2019).

Esta cuádrica con un punto singular en el vértice no puede clasificarse como superficie regular, pero sin embargo goza de buenas propiedades en cuanto a su sencillez en la parametrización. Así, dentro de las superficies regladas, queda parametrizada a partir de una directriz dada por una circunferencia y generatrices todas pasando por el vértice, que se sitúa en la recta perpendicular al plano de la circunferencia por su centro. La característica de estas cuádricas corresponde a la nulidad del determinante de la matriz asociada a la cuádrica, mientras que la matriz de términos cuadráticos admite todos sus autovalores no nulos y con algún cambio de signo que determina el signo negativo acompañando a la tercera variable en la formulación anterior, que es la de la forma simplificada de la cuádrica. Por similitud a esta, el cambio de signo en este término determina lo que se conoce como cono imaginario. A la vista de su ecuación implícita, los conos imaginarios se reducen a un único punto: el vértice.

Cilindro. Está presente en toda clase de obras, principalmente en forma de arco, nombre que recibe tanto la curva como la estructura asociada. El arco revoluciona la edificación, permitiendo cubrir luces importantes a base de combinar elementos de mediano o pequeño tamaño, que trabajan a compresión y se comportan muy bien frente a fuego. Se encuentra en un gran número de obras, tales como: el Hall del Cemento, Orly, el Frontón de Recoletos, la fábrica de Gossau de Hossdorf, etc. (Figura 1.27, Figura 1.28).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La particularidad de este tipo de cuádricas se encuentra en que las generatrices siguen una misma dirección, siendo su directriz dada por una elipse, hipérbola o parábola dibujadas en un plano que no contiene al vértice. Aunque existen otras familias de

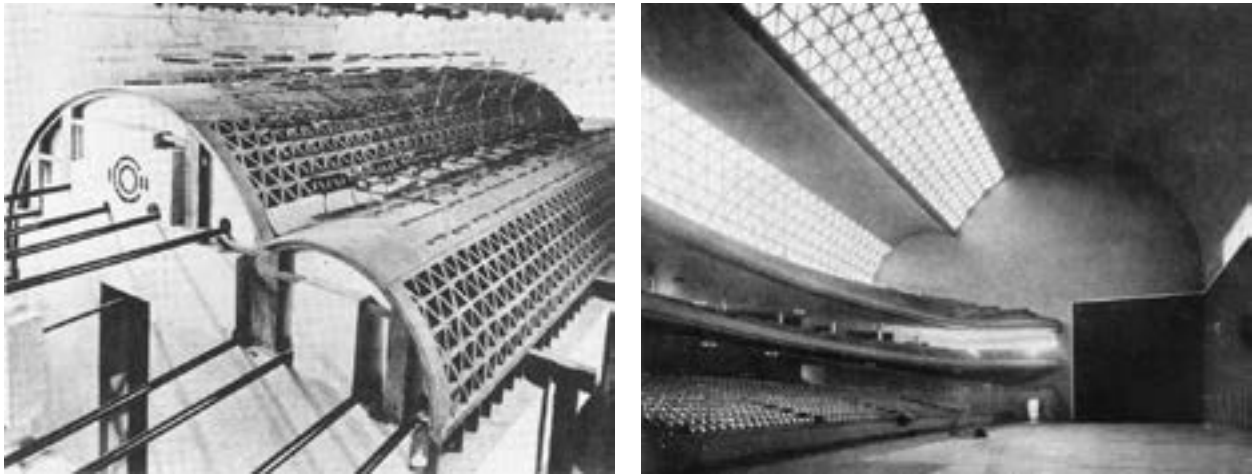


Figura 1.27. Izquierda: modelo a escala del Frontón de Recoletos, Eduardo Torroja, 1935. El trabajo teórico de cálculo se puso a prueba con un modelo a escala (Lozano-Galant, Payá-Zaforteza, 2011). Derecha: Frontón Recoletos, Eduardo Torroja, 1935. Cubierta formada por dos cilindros de hormigón de 55 metros de luz en forma de alas (Chías Navarro, Abad Balboa, 2005.)

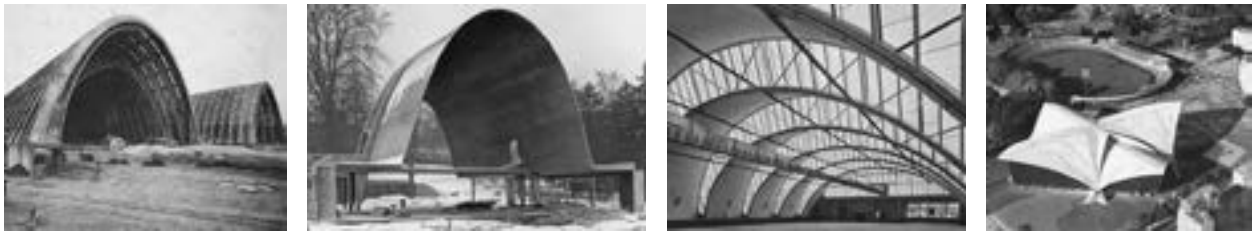


Figura 1.28. Primera imagen: hangares para dirigibles de Orly, Francia, Eugène Freyssinet, 1923. Estas estructuras son cilindros de directriz parabólica (Fernández Ordóñez, 1978). Segunda imagen: Cementhalle, Robert Maillart, Zurich, 1939. Lámina de hormigón gunitado, de 6 cm de espesor. Demolida (Maillart, Bill, 1955). Tercera imagen: nave industrial en Gossau, de Hossdorf, Danzeisen y Voser, 1954 (Cassinello, P., 2006). La cubierta está formada por cilindros de eje inclinado, permitiendo pasar la luz por el desfase entre las circunferencias de sus bases. Cuarta imagen: Estadio olímpico deportes de hielo, Grenoble, Francia, N. Esquillan, 1969. La cubierta se apoya en los puntos medios de un cuadrado de 113 metros de lado. Se forma por la intersección de dos cilindros de distinto radio. Ostenta el récord de voladizo en cubiertas abovedadas (48 metros) (Esquillan, 1969).

superficies cilíndricas con base dada por una curva alabeada más general, estas son las únicas que determinan cuádricas, es decir, son los ceros de un polinomio de segundo grado en tres variables. Dependiendo del tipo de cilindro su parametrización en forma canónica es la siguiente: en el caso de un cilindro elíptico, se tiene la parametrización:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a \cos(t), b \sin(t), s]$$

Cuando estamos ante un cilindro hiperbólico, podemos parametrizarlo en forma canónica mediante:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a \cosh(t), b \sinh(t), s]$$

Mientras que, si este es parabólico, una parametrización de $x^2 + by + cz + d = 0$, sería:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [t, s(-d - t^2 - bs)/c]$$

si c no se anula, y

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = \left[t, \frac{-d - t^2 - cs}{b}, s \right],$$

cuando b no se anula.

Paraboloide hiperbólico. Es una superficie cuádrica infinita y reglada que se produce por desplazamiento de una recta (generatriz) que se apoya sobre otras dos (directrices), manteniéndose paralela a un plano (Figura 1.29). Se da en muchas de las obras de Félix Candela (Figura 1.30), como el restaurante Los Manantiales, en Xochimilco, la capilla de Palmira, en Cuernavaca, o en el auditorio del Parque el Paraíso de Madrid, diseñado por Cleto Barreiro (Figura 1.31).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

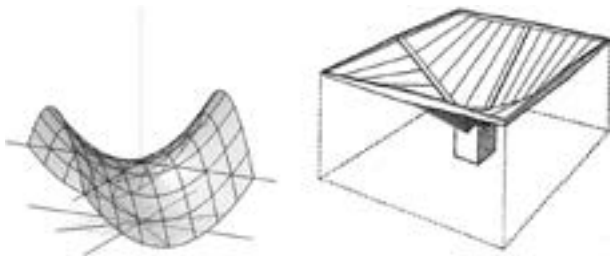


Figura 1.29. Izquierda: Paraboloide Hiperbólico. Derecha: Aimond, 1936, Paraguas, Etude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion. Este dibujo representa el primer diseño de paraguas formado por paraboloide hiperbólicos (Aimond, 1936, p. 10).

En esta situación, la submatriz de términos cuadráticos tiene un autovalor nulo, mientras que el determinante de la matriz principal es positivo. Es una de las superficies regladas que no son desarrollables,

ya que su curvatura gaussiana no se anula, y de hecho es siempre negativa. Una parametrización de un paraboloide en forma canónica sería de la forma:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t), b s \cosh(t), s^2]$$

y

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t), b s \cosh(t), -s^2]$$

La primera de las parametrizaciones dibuja los puntos por encima del plano de suelo, y la segunda aquellos por debajo. Solo dibujaría el origen de coordenadas en planta, en lugar del par de rectas secantes dadas por:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$



Figura 1.30. Izquierda: restaurante Los Manantiales, Félix Candela, 1958 (Cassinello, Pepa, 2010). Derecha: Capilla de Palmira en Cuernavaca, México, Félix Candela, 1958 (Draper, 2008).



Figura 1.31. Izquierda: Pabellón Philips, Le Corbusier y Iannis Xenakis, 1958 (Xenakis, Le Corbusier, 1994). Centro: planta embotelladora Barcardí, Tultitlán, México, Félix Candela, 1960 (Torroja, J. A., Cassinello y Schlaich, 2010). Derecha: cubierta para auditorio en el parque El Paraíso, San Blas (Madrid) de Cleto Barreiro Sorriveras, 2006. Es un conjunto formado por un paraboloide hiperbólico cuya planta está limitada por la forma de un óvalo, replicado varias veces en distintos tamaños y posiciones (Cleto, Fernando Caramés Gómez, 2007).

Hiperboloide hiperbólico. Es una superficie cuádrica infinita generada por la revolución de una rama de hipérbola sobre su eje imaginario, es decir, el perpendicular al que une los focos. Además, es una reglada en la que aparecen dos familias de rectas pertenecientes a la superficie, que se apoyan en dos circunferencias perpendiculares al eje de revolución. Si tomamos una de estas generatrices y la hacemos revolucionar alrededor del eje también obtenemos la misma superficie. El punto de menor distancia entre eje y generatriz marca la posición del círculo de garganta, el más reducido de toda la superficie (Figura 1.32).

Como ejemplo tenemos las torres de refrigeración de las centrales nucleares, que utilizan este hiperboloide de una hoja o hiperboloide hiperbólico. El palacio de la asamblea de Chandigarh realizado

por Le Corbusier en 1961 incluye un cascarón hiperboloide de hormigón cortado por un plano inclinado superior y aloja la gran sala de reunión. Destacan también las formas de la cubierta de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela y el depósito de Fedala, de Eduardo Torroja, el mirador Treetop, de EFFEKT (Figura 1.33), la silla Nest Chair (Lastra, De Miguel, 2020), de Markus Johanson o la estación de autobuses de El Casar, de Justo García (Figura 1.34).

En el marco de las matemáticas, los autovalores de la matriz de términos cuadráticos tienen distinto signo, y los autovectores asociados indican la dirección de sus ejes de simetría. Es una superficie doblemente reglada. Obsérvese, por ejemplo, en la familia de hiperboloides definidos por la ecuación implícita:

$$2x^2 + 2y^2 + [\cos(s) - 1]z^2 - \cos(s) - 1 = 0,$$



Figura 1.32. Izquierda: hiperboloide hiperbólico. Derecha: tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Madrid, Eduardo Torroja, 1935. Esta obra incorpora los hiperboloides hiperbólicos en las láminas voladas de la cubierta, mientras que las gradas se apoyan en bóvedas tóricas (Torroja, E., 1962b) (Moragues et al., 2015) (Martínez, I., Castillo, 2018).



Figura 1.33. Izquierda: depósito de agua en Fedala, Marruecos, Eduardo Torroja, 1956. La estructura consta de dos hiperboloides hiperbólicos unidos por su círculo de garganta y bóvedas anulares de directriz parabólica (Torroja, E., 1962a). Centro: mirador Treetop, Copenhague, Denmark, EFFEKT Studio, 2018. Este elemento es un hiperboloide hiperbólico representado por sus generatrices y directrices. En su interior se incluye una rampa helicoidal que se adapta a la forma de la hipérbola (Caliò, Marchetti, 2019). Derecha: Hélices contenidas en un hiperboloide de una hoja.



Figura 1.34. Estación de autobuses, El Casar de Cáceres, Justo García Rubio, 2004. Las láminas de hormigón combinan hiperboloides de diferentes radios.

para cualquier valor real de s . Si el valor de s es 0 tenemos un cilindro, mientras que para π conseguimos un cono. Todos los valores intermedios dibujan un hiperboloide hiperbólico. Además, es directo comprobar que para cada s , las dos familias de rectas parametrizadas por:

$$[x(t), y(t), z(t)] = [1 + t[\cos(s) - 1], t \sin(s), 2t - 1],$$

$$[x(t), y(t), z(t)] = [1 + t[\cos(s) - 1], -t \sin(s), 2t - 1],$$

son rectas contenidas en dicho hiperboloide. Una parametrización del hiperboloide definido en forma canónica sería:

$$\begin{aligned} [x(t, s), y(t, s), z(t, s)] &= \\ &= [a \cosh(t) \cos(s), b \cosh(t) \sin(s), c \cosh(t)] \end{aligned}$$

Paraboloide elíptico. Se produce por la rotación de una parábola en torno a su eje de simetría (Figura 1.35). Los objetos que suelen ilustrar esta superficie

son las copas de helado. La superficie de revolución generada por una parábola alrededor de su eje tiene la propiedad de reflejar todos los rayos desde el foco a la dirección del eje o viceversa. Esto hace su uso idóneo para la elaboración de faros, proyectores, antenas o radares. William Hutchinson en 1752 construyó el primer reflector parabólico de un faro de mar.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

Respecto al paraboloide hiperbólico, en su clasificación solo difieren respecto al signo en el determinante de la matriz de la cuádrica. Sin embargo, sus estructuras son muy diferentes. Este no es una superficie reglada, y sin embargo es una superficie de revolución. Una parametrización cuando la cuádrica viene dada en forma canónica es:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \cos(t), b s \cos(t), s^2]$$



Figura 1.35. Izquierda: Paraboloide elíptico. Centro: Chozo de ramas en la Codosera, Badajoz. De Berrocal <http://joseluisolmoberrocal.blogspot.com/2013/02/los-chozos.html>. Esta estructura se construye para albergar a pastores en sus estancias en el campo. Se suele utilizar para ello ramas de encina recubiertas con retamas. La forma curva de las ramas se aproxima a la del paraboloide elíptico, arrancando con una curvatura más abierta, para redondearse en la mitad superior. El acabado en punta desdibuja un tanto su semejanza. Derecha: pabellón en el Parque de Ibirapuera, Sao Paulo, Oscar Niemeyer, 1954. Es una cúpula de hormigón de sección parabólica.

Hiperboloide elíptico. Superficie de revolución formada por las ramas de una hipérbola al rotar sobre el eje real (Figura 1.36). La forma recuerda bastante a la del paraboloides elíptico, aunque en este caso posee dos hojas.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Al igual que en el caso de los paraboloides, el hiperboloide elíptico y el hiperbólico difieren en cuanto a su clasificación en términos matriciales en el signo del determinante de la matriz que define la cuádrica. Por otro lado, es la única cuádrica que

está formada por dos componentes conexas, desde el punto de vista topológico. Una parametrización de esta cuádrica es:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t) \cos(s), \\ b \operatorname{sen} h(t) \operatorname{sen}(s), c \cos h(t)],$$

para la rama superior y

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [a s \operatorname{sen} h(t) \cos(s), \\ b \operatorname{sen} h(t) \operatorname{sen}(s), -c \cos h(t)],$$

para la rama inferior.

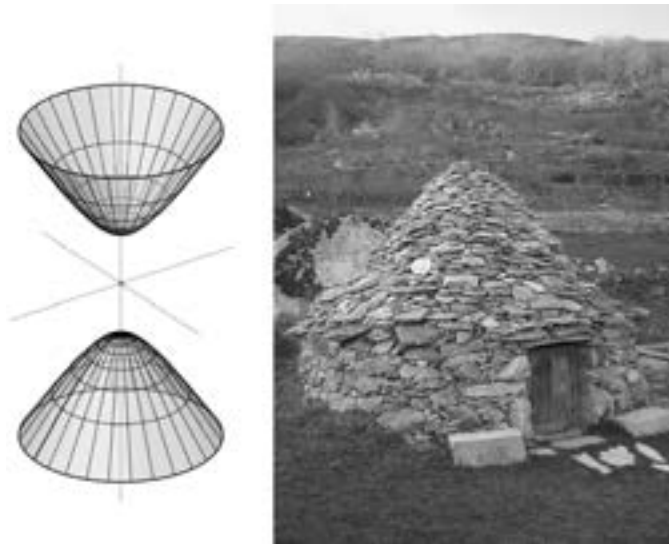


Figura 1.36. Izquierda: Hiperboloide elíptico. Derecha: Chozo de piedra. <https://es.wikipedia.org/wiki/Chozo>. Construcción tradicional de zonas de pastoreo en España. La forma cónica responde a una falsa cúpula de lajas inclinadas, que se redondea en la cúspide, lo que recuerda al cono asintótico del hiperboloide y por ello se puede considerar aproximada a esta superficie.

1.7. Otras superficies regladas en arquitectura

Las regladas son superficies especialmente utilizadas en construcción debido a su facilidad para calcular, replantar en obra y sistematizar su construcción (Figura 1.37 a Figura 1.40). Veremos que helicoides, como las escaleras de caracol, son definidas por la geometría del peldaño, que facilita la producción seriada. O los capitalzados, superficies de interpolación de dos curvas a través de una superficie reglada, a los que recurría la cantería para resolver complejos encuentros.

En general, una superficie reglada es una superficie que puede parametrizarse en la forma:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = \alpha(t) + s\beta(t),$$

donde $\alpha(t)$ es la parametrización de una curva alabeada, y siendo $\beta(t)$ un vector del espacio vectorial tridimensional real que resulta ser la dirección no nula que siguen las generatrices de la superficie reglada. Así, para cada valor del primer parámetro se tiene una recta que pasa por la curva directriz, con dirección dada por el vector $\beta(t)$. Entre las superficies regladas destacamos, por su interés en arquitectura las superficies cónicas (entre las que se encuentran los conos, como superficies cuádricas), cuya parametrización es tal que el vector desde $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ tiene un punto común para todo valor de t ; las superficies cilíndricas (entre ellas los cilindros que se engloban dentro de las superficies cuádricas, pero no restringido a ellos) para las cuales $\beta(t)$ es constante; o las superficies helicoidales. Estas últimas forman parte de las llamadas *superfi-*

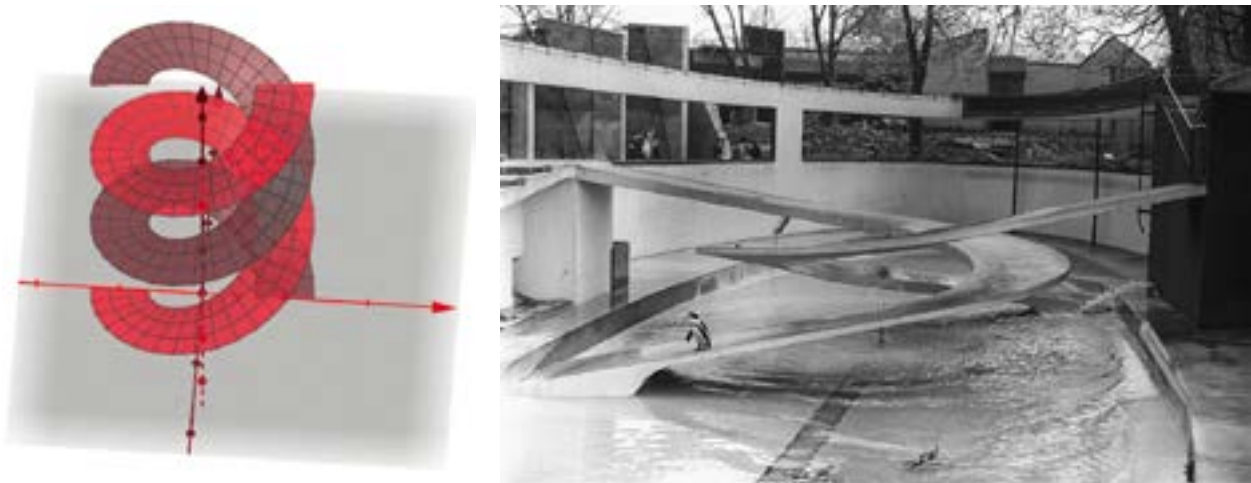


Figura 1.37. Izquierda: doble helicoide. Derecha: penguin Pool, Park Zoo, Londres, Berthold Lubetkin, 1934 (imagen de Gillfoto, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:London_Zoo_40393.jpg, Wikimedia Commons). Las rampas son losas helicoidales voladas.



Figura 1.38. Izquierda: Museo de la Memoria de Andalucía, Granada (Campo Baeza, 2010). Las rampas son helicoides cilíndricos. Derecha: Cúpula del Reichstag, Norman Foster, 1999 (imagen de Francesco Luca Labianca, licencia Unsplash, <https://unsplash.com/es/fotos/s6GxA0FDDBE>). Las rampas interiores son helicoides que se apoyan en hélices esféricas.

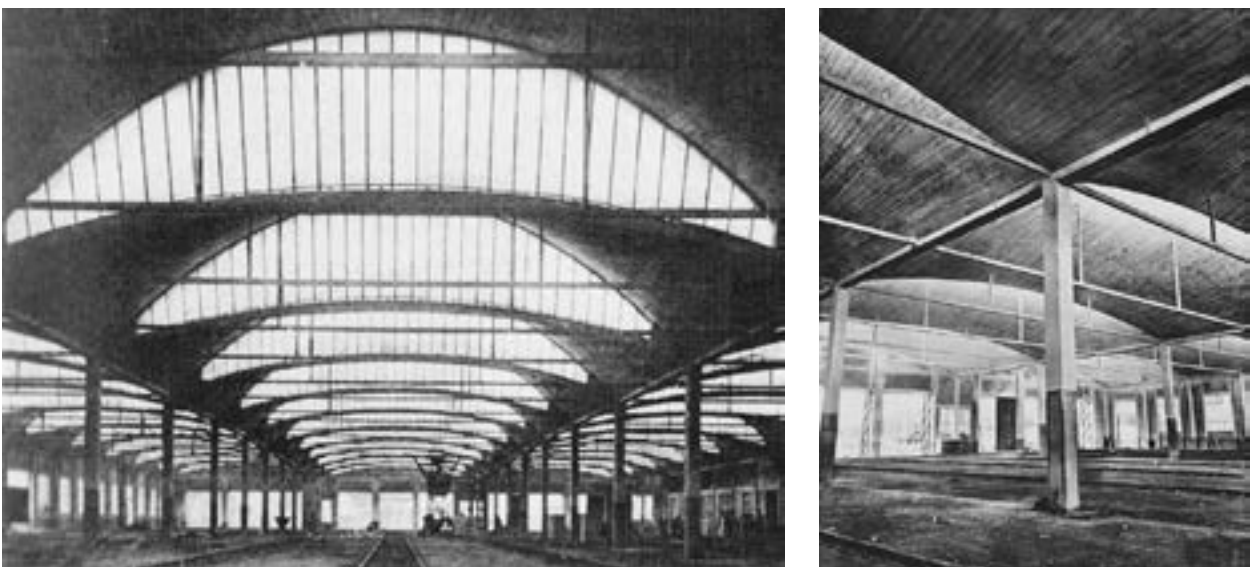


Figura 1.39. Taller de reparación de ferrocarriles en Bagneux, Eugène Freyssinet, 1927 (Fernández Ordóñez, 1978), p. 113. Las cubiertas son superficies regladas que unen dos arcos de distinto radio.



Figura 1.40. Izquierda: Escuela de la Sagrada Familia, Antonio Gaudí, 1909 (Adell, García Santos, 2005). Es una superficie reglada que une la recta central con dos curvas sinusoidales laterales opuestas. Derecha: Iglesia del Cristo Obrero, Atlántida, Uruguay, Eladio Dieste, 1959. (Dieste, 1961) (Guindal, Adell, 2005). Las paredes son superficies regladas que unen una recta a nivel de suelo con una curva senoide en coronación. La cubierta, sin embargo, es una red de curvas que une las sinusoides horizontales laterales con la vertical central.

cies de Catalan, para las cuales el vector $\beta(t)$ se encuentra siempre en una variedad de dimensión dos. Así, por ejemplo, el helicoides clásico se parametriza mediante:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [s \cos(t), s \sin(t), t]$$

y que por tanto se puede escribir como:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [0, 0, t] + s[\cos(t), \sin(t), 0]$$

Obsérvese que el vector $\beta(t)$ se encuentra en el plano de suelo.

Las estructuras conoides también son una subclase de las superficies de catalán (Figura 1.41). Estas satisfacen que todas las generatrices pasan por una recta determinada. Por ejemplo, supongamos que la recta por la que pasan todas las generatrices es la recta de ecuaciones $x = z = 0$ y la directriz es la

parábola parametrizada por $(1, s, -s^2)$ para valores del parámetro entre -1 y 1 , que está contenido en el plano $x = 1$. Entonces, la superficie conoide resultante tiene la parametrización dada por:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [1 + s, t^2, st^2],$$

para s real y t entre -1 y 1 .

1.8. Otras superficies curvas en arquitectura

Algunas arquitecturas se basan en el desplazamiento de unas curvas sobre otras, a veces utilizando curvas planas y en otras ocasiones alabeadas. Por ejemplo, el proyecto para el Club Tachira de Torroja, la fábrica Sicli, de Isler en Ginebra (Figura 1.42), las bóvedas de la iglesia del Cristo Obrero, de Dieste, o el Ontario Pavillion, de Hariri Pontarini (Figura 1.43).

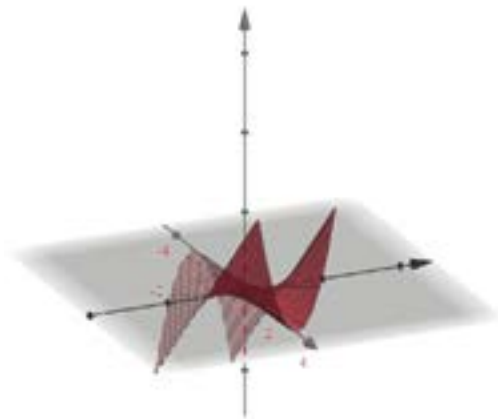


Figura 1.41. Izquierda: conoide. Derecha: marquesina de la Unesco, París, Pier Luigi Nervi y Marcel Breuer, 1958. (Martín Fuentes, 2018). Esta superficie reglada une un arco y una curva superior muy tendida.

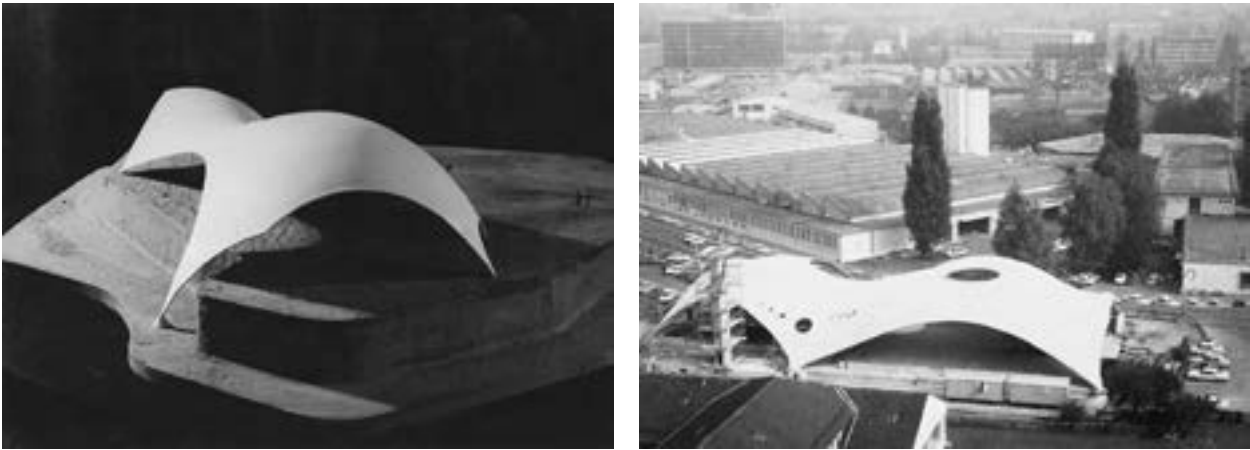


Figura 1.42. Izquierda: Proyecto para el Club Tachira, Eduardo Torroja, 1957. Se configura como el deslizamiento de una parábola sobre una curva alabeada (Escrig, Sánchez, 2005). Derecha: fábrica Sicli, Ginebra, Heinz Isler, 1969 (Chilton, Chuang, 2017). (Chilton, 2000) (Kotnik, 2011) (Baghdadi, Heristchian y Kloft, 2019).



Figura 1.43. Izquierda: Ontario Pavilion, Hariri Pontarini, 2015 (Jungjohann, Woodington, 2016). Centro y derecha: espacio La Nube, Madrid, Álvaro Gómis, Hugo Cifre, Margarita Fernández, Miguel Ángel Maure, 2016 (Cifre, Gomis y Maure). Son superficies formada por un arco trasladado sobre otras dos curvas planas abiertas o cerradas.

Los toros o toroides son superficies de revolución en los que una curva revoluciona en torno a una recta que no pasa por su centro o eje. Son ejemplos algunas bóvedas de Torroja, como las de ladrillo del depósito de Fedala, o las bóvedas de hormigón bajo la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela (Figura 1.44).

El modelado de un toro clásico matemáticamente consiste en girar una circunferencia cuyo centro se encuentra en otra circunferencia, ambas situadas en planos perpendiculares, siendo el vector normal al plano que contiene la primera el vector tangente a la segunda. Con esta descripción se puede parametrizar un toro clásico por:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [R \cos(t) + r \cos(s) \cos(t), R \sin(t) + r \cos(s) \sin(t), r \sin(s)]$$

En la parametrización anterior, R representa el radio de la circunferencia fija y r el de la circunferencia móvil. Obsérvese que toda la superficie queda recubierta en cada intervalo de longitud 2π . La ecuación implícita del toro se puede obtener también mediante resultados de implicitación de parametrizaciones, obteniendo la superficie asociada a la ecuación

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Cabe señalar que esta es una cuártica, mencionada previamente en el texto.

La Figura 1.45 muestra la aproximación al Winward City Foodland de Joedicke a partir de una representación paramétrica del toro, ajustando la definición de sus parámetros adecuadamente.

$$[\cos(u)[R + r \cos(v)], \sin(u)[R + r \cos(v)], r \sin(v)]$$



Figura 1.44. Izquierda: Tribunas del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1935. Las bóvedas bajo las gradas son láminas tóricas de hormigón. La curvatura transversal se mantiene, mientras la directriz longitudinal combina una recta y dos arcos de circunferencia, creando una gran riqueza espacial a la vez que saca un gran partido a la cimbra. Imagen de los autores. Derecha: parroquia de los Santos Apóstoles, urbanización Las Lomas, Boadilla del Monte, Madrid, Rafael García de Castro y Ricardo Mexía, 1968 (García De Castro, 1968). La cubierta de esta iglesia se genera por revolución de una rama de hipérbola girando sobre su asíntota, que se sitúa como eje vertical.



Figura 1.45. Izquierda: Windward City Foodland, Keneohe, Hawaii, UU. EE., J. Joedicke, 1958 (Joedicke, 1964). La cubierta es una bóveda por arista bitórica, cubre una planta cuadrada de 39 metros de lado y su espesor varía desde 8 cm en el centro hasta los 18 cm. Derecha: representación del edificio toroidal en Keneohe. Representación Geogebra.

junto con un toro rotado horizontalmente un cuarto de vuelta.

1.9. Clasificación de superficies regladas alabeadas

Las superficies regladas alabeadas son de especial relevancia en arquitectura porque permiten calcular y replantear las estructuras con relativa facilidad. No todas son desarrollables, pero su configuración a base de generatrices permite un buen control formal. (Izquierdo Asensi, 1996). Se presenta una clasificación en las tablas 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4.

1.10. Teoremas de cuádricas

Para poder resolver los problemas de operaciones con cuádricas el conocimiento de los teoremas es fundamental. La que sigue no es una clasificación exhaustiva, pero es necesaria para la práctica de la geometría descriptiva (Gil López, 2006):

- Toda sección plana de una cuádrica es una cónica.
- Dos secciones planas de una misma cuádrica son homológicas.
- La intersección de dos cuádricas es, en general, una curva de cuarto grado y la pro-

Tabla 1.1. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies anaxiales (sin directrices rectas o ejes). Elaboración de los autores.

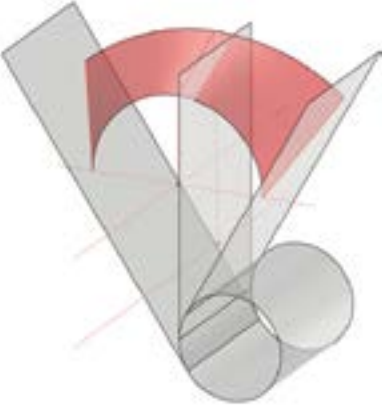
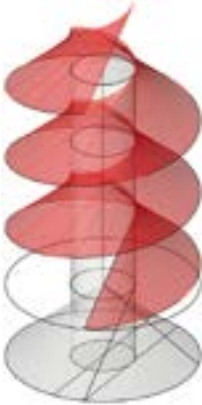
Anaxial ordinaria	Anaxial de cono director
 Capialzado cilíndrico	 Helicoide cilíndrico oblicuo

Tabla 1.2. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies axiales (una directriz recta o eje). Elaboración de los autores.

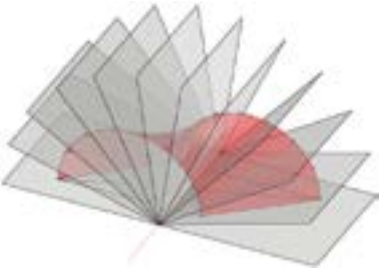
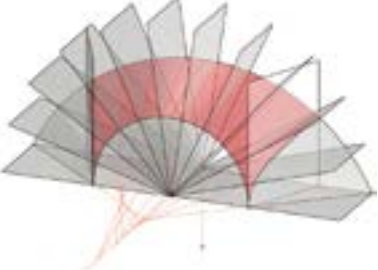
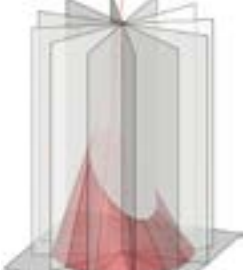
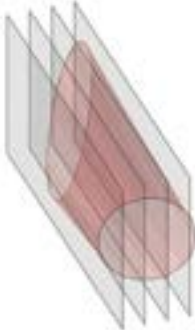
Axial ordinaria		
 Cuerno de Vaca	 Capialzado de Marsella	 Cono alabeado
Axial de plano director		Axial de cono director
 Cilindroide	 Helicoide cilíndrico recto	 Helicoide axial oblicuo

Tabla 1.3. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies biaxiales. Elaboración de los autores.

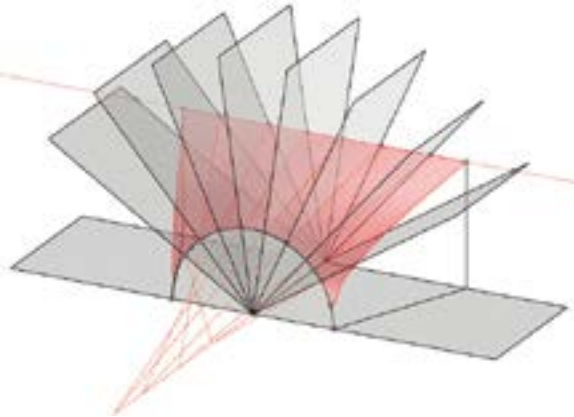
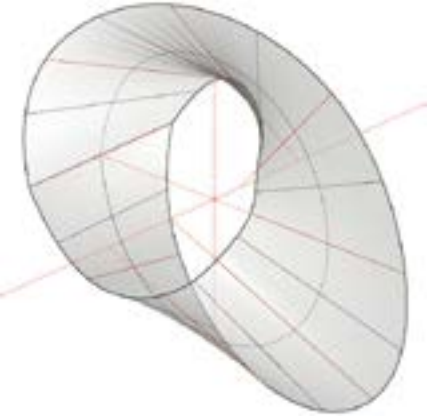
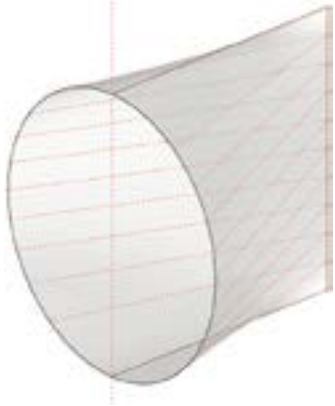
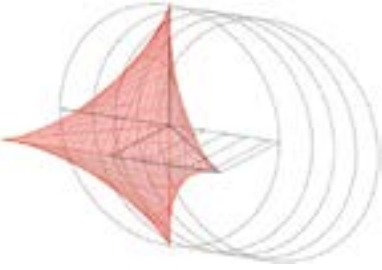
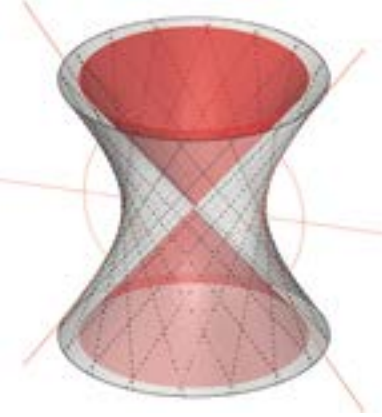
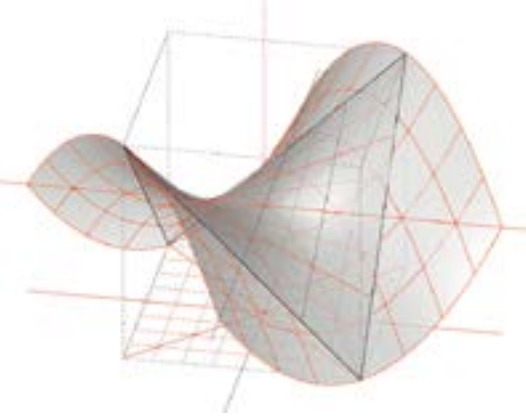
Biaxial ordinaria		
 Capialzado de arco de Arco Círculo o de San Antonio		 Birrotacional de una sola cara
Biaxial de plano director		Biaxial de cono director
 Conoide	 Helicoide axial recto	 Tetraedroide

Tabla 1.4. Clasificación de superficies regladas alabeadas: superficies triaxiales. Elaboración de los autores.

Triaxial ordinaria	Triaxial de plano director
 Hiperboloide hiperbólico	 Paraboloide hiperbólico

- yección de esta curva sobre cualquier plano es, en general, una curva de cuarto grado.
- Cuando dos cuádricas tienen una cónica en común, el resto de la intersección será otra cuádrica.
 - Dos cuádricas tangentes en dos puntos se cortan según dos curvas planas (cónicas) que pasan por dichos puntos.
 - La intersección de dos cuádricas que tienen un plano de simetría común se proyecta ortogonalmente sobre ese plano como una cónica.
 - Si dos cuádricas que se intersecan según dos curvas planas tienen un plano de simetría común, la proyección sobre este serán dos rectas.
 - La curva de tangencia entre dos cuádricas es plana.
 - Dos cuádricas homotéticas se intersecan según dos curvas planas, una propia y otra impropia.
 - La intersección de dos cuádricas de revolución con ejes paralelos se proyecta ortogonalmente en el plano de los ejes según arco o arcos de la misma parábola.
 - La intersección de dos cuádricas de revolución de ejes incidentes se proyecta ortogonalmente en el plano de los ejes según arco o arcos de la misma hipérbola.
 - La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común una generatriz se cumple con una curva de tercer grado.
 - La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común dos generatrices concurrentes se completa con otras dos generatrices o una cónica.

2. CURVAS Y SUPERFICIES EN LOS TRATADOS DE CANTERÍA Y GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Como ya se ha comentado, nos interesan especialmente las curvas y superficies de mayor uso en arquitectura e ingeniería contemporáneas. Aunque tales elementos se encuentran en toda la historia de la arquitectura, es a partir de los siglos XVII y XVIII cuando se producen los mayores progresos de la geometría proyectiva y analítica, y cuando la estereotomía se convierte, de la mano de aquellas, en geometría descriptiva. Las curvas y superficies y los cuerpos geométricos abstractos están en la base de la ideación de toda obra de edificación. En nuestra voluntad está discernir aquellas con mayor interés geométrico, por su complejidad e importancia en la visión que aquí se expone. La intención didáctica nos anima a dirigir la mirada a obras más cercanas históricamente (siglos XX y XXI), pero es necesario hacer un breve repaso de las fuentes escritas y gráficas históricas, que explican el conocimiento y aplicación de las entidades geométricas en el diseño de la arquitectura.

La tradición cantera medieval emergió en los escritos del siglo XVI y posteriores, dejando de ser un secreto preservado por los gremios y empezando a formar parte de un conocimiento generalizado. El nuevo carácter del arquitecto renacentista y la extensión del uso del papel en Europa facilitó la aparición de manuales de construcción, que progresivamente se harían más técnicos y sofisticados, tanto por sus diseños como por el lenguaje de sus representaciones. Poco a poco, estos trabajos se fueron separando de la práctica de obra y convirtiéndose en ejercicios más académicos que aplicados.

Las nuevas formas renacentistas que se extienden principalmente en Francia y España en el siglo XVI son adoptadas por la cantería, lo que genera nuevos y complejos problemas que se verán reflejados en muchos de los tratados de la talla de la piedra. Se puede afirmar que en las bóvedas góticas se buscaba complejidad en el resultado, pero también procedimientos sistemáticos y eficaces, mientras en el Renacimiento se invierte la situación y se pretende definir una traza que resuelva cada forma propuesta por la arquitectura clásica (Rabasa, E., 2013). Revisaremos algunos de estos textos con el fin de

tener una visión general del uso de las curvas y superficies, heredado de la tradición constructiva y formalizado en las obras teóricas.

Durante esta época el proceso de edificación se va subordinando gradualmente al de planificación y diseño. El proyecto arquitectónico tal como lo entendemos ahora es una de las grandes invenciones del Renacimiento (Salvatore, 2011). En adelante la mejora en los métodos gráficos irá de la mano de la evolución de las técnicas constructivas. Pasará de las trazas de cantería medievales, compuestas por unas pocas curvas indicadoras de la labra, a dibujos que describen los procesos de labrado, así como las piezas terminadas y que dedica cada vez más espacio a la representación con fines didácticos.

2.1. La representación de curvas y superficies en el siglo XVI

Nos interesa subrayar la función del dibujo con fines de divulgación y didácticos. Vamos a revisar algunos de los textos renacentistas más conocidos, buscando métodos gráficos y representaciones abstractas de curvas y superficies. Durante el siglo XVI emergen numerosos tratados en Italia, Francia y España que fundamentalmente tienen por objeto materias propias de la construcción, como la cantería y la carpintería, pero también la arquitectura, haciendo referencia al texto vitruviano (Vitrubio Polión, 1999), editado pocas décadas antes.

Como ya se ha comentado, en el *Libro I* de Serlio (1551) se incluyen trazados de numerosas figuras planas, polígonos, óvalos y proporciones (Figura 2.1). En el *Libro II*, podemos ver la proyección cónica de la circunferencia, de nuevo en forma de elipse. El resto de la obra incluye dibujos de edificios de la antigüedad, órdenes clásicos, techos, puertas, etc. Aunque el enfoque de los libros del boloñés es claramente didáctico, entre las láminas no encontramos superficies tratadas de forma abstracta, como entidades independientes de la arquitectura que las contiene, ni procedimientos de construcción gráfica.

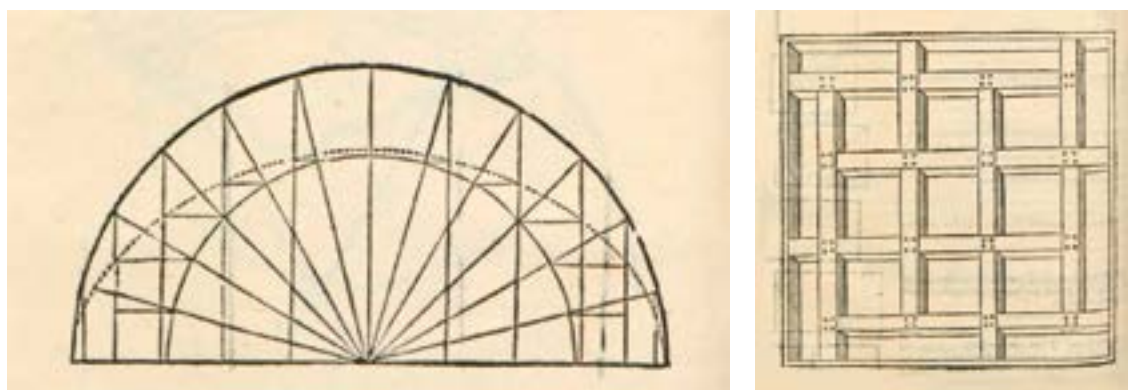


Figura 2.1. Izquierda: método para rebajar un arco de medio punto, Sebastiano Serlio, *Libro I*, fol. 11v. El resultado de combinar dos circunferencias con este método es una elipse de semeje mayor el de la circunferencia grande y de semeje menor el radio de la pequeña. Derecha: ejemplo de estructura de forjado, Sebastiano Serlio, *Libro I*, fol. 19v. 1551. Sistema similar a lo que hoy en día conocemos como estructuras recíprocas, artificios que permitían cubrir un espacio con elementos de menor longitud que la luz de este. Son propias de la construcción con madera.

Hernán Ruiz fue un cantero cordobés que aprendió el oficio con su padre, Hernán Ruiz el Viejo. Llega a ser nombrado maestro mayor de la Catedral de Sevilla y escribe su *Libro de Arquitectura* (Ruiz, 1560) (Navascués Palacio, 1971). Este texto incluye una traducción de Vitruvio, geometría de Euclides y numerosos dibujos de cantería, arquitectura e incluso anatomía, de excelente factura. Se incluye, por ejemplo, el mismo método de cálculo de la elipse que aportaba Serlio pocos años antes, ade-

más de numerosos trazados de geometría plana, polígonos, proporciones, divisiones en partes, óvalos, espirales, etc. Destaca el método de construcción de las curvas cónicas, representa la elipse y la hipérbola sobre un dibujo de un cono en el que aparecen perfectamente coordinados planta y alzado (Figura 2.2). Hay una tercera sección que es una elipse, aunque puede que el autor estuviera tratando de construir una parábola, pues se aproxima al ángulo de la generatriz opuesta.

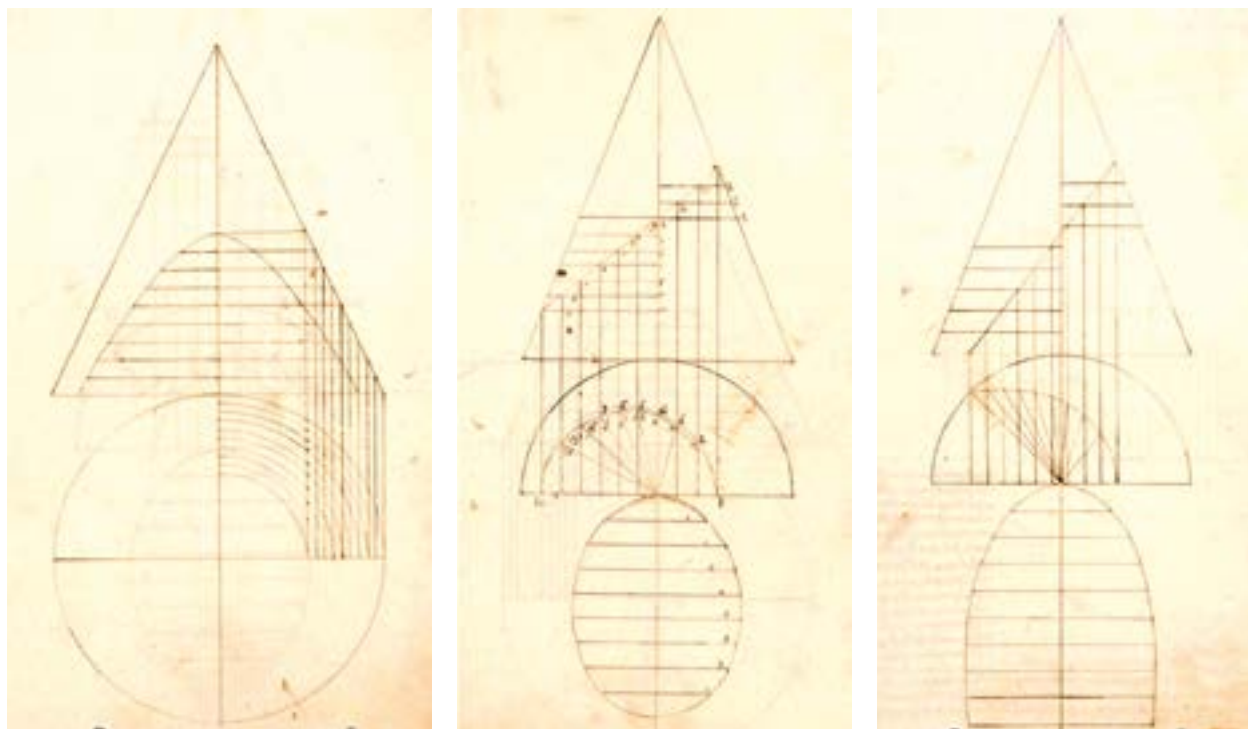


Figura 2.2. Curvas cónicas, Hernán Ruiz *el Joven*. Se representan una rama de hipérbola y dos elipses, aunque es posible que el tercer dibujo tratara de construir una parábola, por el ángulo elegido. *Libro de Arquitectura*, Ruiz, 1560, fol. 28r, fol. 28v y fol. 29r. Destaca el hecho de que los dibujos coordinan perfectamente planta y alzado del cono y el procedimiento de construcción de las curvas es claro.

En *Le Premier Tome de L'Architecture*, de Philibert de L'Orme (De l'Orme, 1568) aparecen los primeros capítulos dedicados al corte de la piedra. De l'Orme fue Arquitecto del rey Enrique II de Francia, cargo que había ocupado previamente Sebastiano Serlio. El boloñés inauguró la tradición tratadística francesa y marcó un camino que su sucesor supo continuar con aportaciones propias (Aranda Alonso, 2015). En el texto, De l'Orme se refiere a sí mismo como *arquitecto*, término que se va imponiendo en el Renacimiento e incluye en sus escritos referencias a la autoridad de los clásicos, como la de Vitruvio.

Este tratado aborda los distintos saberes del arquitecto en una época en la que coexisten la tradición gótica y la nueva construcción «al romano». Este nuevo lenguaje se basa en superficies definidas por cuerpos geométricos euclidianos. Nos interesa especialmente la expresión de estas superficies, de los conos, cilindros y esferas, que se muestran de manera independiente de las decoraciones, aunque todavía no se independizan de la expresión de su construcción en piedra. Los capítulos tercero y cuarto son los centrados en los conocimientos de estereotomía.¹

En el tercer libro encontramos, por ejemplo, representaciones de capialzados, unas superficies curvas que cubren huecos o pasos en muros de gran espesor, tradicionales en cantería. El Capialzado de

Marsella es una superficie reglada que une dos arcos de círculo, uno de medio punto y otro rebajado. Las generatrices se hayan por intersección de un haz de planos con la superficie y la piedra se corta siguiendo esos mismos planos en posición radial. El haz tiene el eje horizontal, perpendicular a las directrices y pasando por el centro del semicírculo.

También hay arcos peculiares en este trabajo, como un arco oblicuo, que une dos semicircunferencias formando un cilindro oblicuo, es decir que su eje no es perpendicular a las directrices. En este caso las dovelas del arco están marcadas en el dibujo, no así las generatrices.

Un caso muy interesante es la denominada *tour de Ronde*, un arco de medio punto en muro curvo (Figura 2.3). La superficie generada es la intersección de tres cilindros rectos, dos verticales y otro horizontal. Como estos cilindros no son bitangentes las curvas intersección no son cónicas, sino curvas alabeadas, de cuarto grado.

Especial mención merecen las trompas descritas en el capítulo cuarto (Figura 2.4), de las cuales De l'Orme realiza una pormenorizada descripción. Son arcos cónicos acodalados entre muros perpendiculares y que se podría decir, están a medio camino entre la pechina y la ménsula. Los dibujos de trompas muestran un borde exterior curvo, que puede ser un arco rebajado o peraltado, o de perfil mixtilíneo. Entre este borde y el centro o vér-

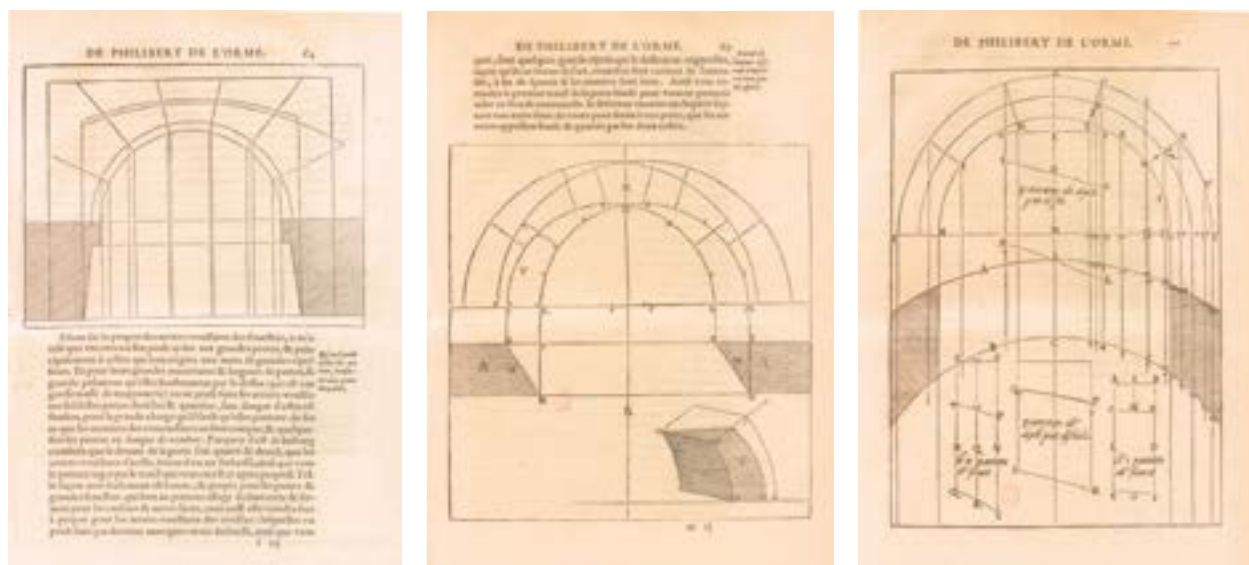


Figura 2.3. Izquierda: capialzado de Marsella. Centro: arco oblicuo. Derecha: *tour de Ronde* (arco de medio punto en muro curvo). *Le premier tome de l'Architecture*, Philibert de l'Orme, 1568, fol. 64r, fol. 69r, fol. 77r, BnF Gallica.

1. El término *estereotomía* no aparece en los textos hasta el siglo XVII. El tratado de Frezier (1737) es el primero que la incluye en el título.

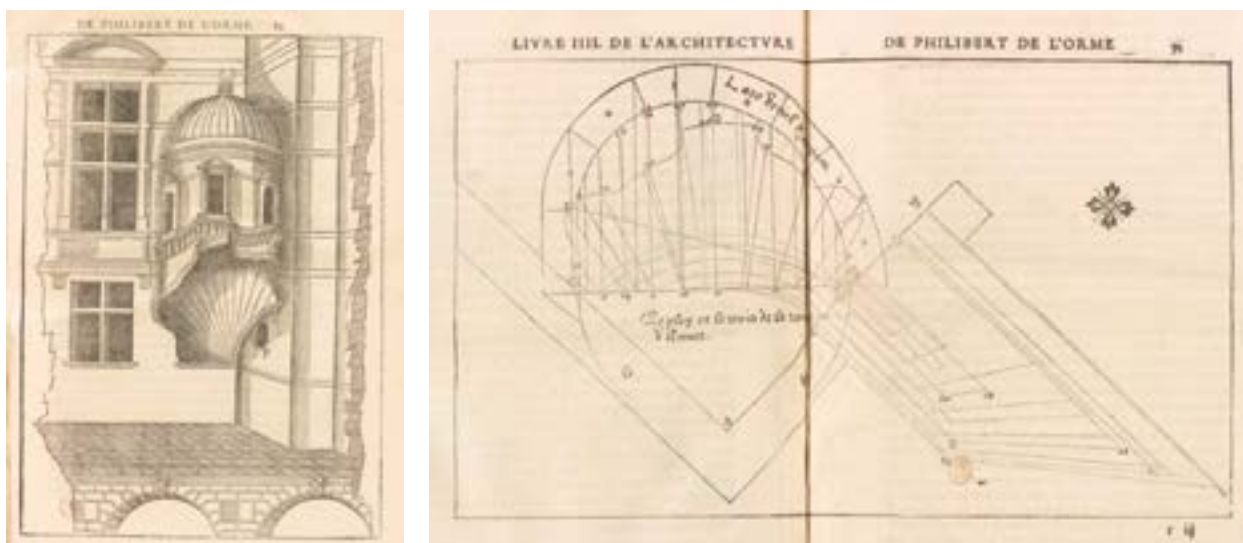


Figura 2.4. Trompa del castillo d'Anet, *Le premier tome de l'Architecture*, Philibert de l'Orme, 1568, fol. 89r, fol. 93r, BnF Gallica.

tice se sitúan las generatrices rectas que configuran el cono o conoide. Las juntas entre las piedras deben trazarse normales a la curva de borde o testa en su encuentro con las juntas de intradós (Calvo-López, 2006).

Nos interesa destacar la inclusión en el tratado de cúpulas esféricas; hay varias bóvedas vaídas tanto de planta cuadrada como rectangular e incluso triangular. La complejidad del trazado de estas piezas radica en que la esfera no es una superficie desarrollable, a pesar de lo cual, se requiere la descripción de plantillas con las que ajustar el corte de las piedras, que podemos observar en los márgenes de la lámina.

Un caso peculiar es la lámina que ilustra una cúpula de media naranja con traza helicoidal (Figura 2.5). Es un aparejo en el que todas las piezas son diferentes, ya que el radio de la hélice en cada punto es distinto, de modo que cada piedra requiere una plantilla diferente, difícil de trazar. De este tipo de cúpula solo existen unos pocos ejemplos conocidos, todos en España, como el de Santa Catalina, en Talavera de la Reina (Rabasa, E., 2013).

De l'Orme dibuja una falsa espiral en planta, que en realidad se forma por la unión de arcos de circunferencia con dos centros. El radio de cada vuelta varía una distancia constante en proyección horizontal, es decir, son arcos concéntricos y equi-

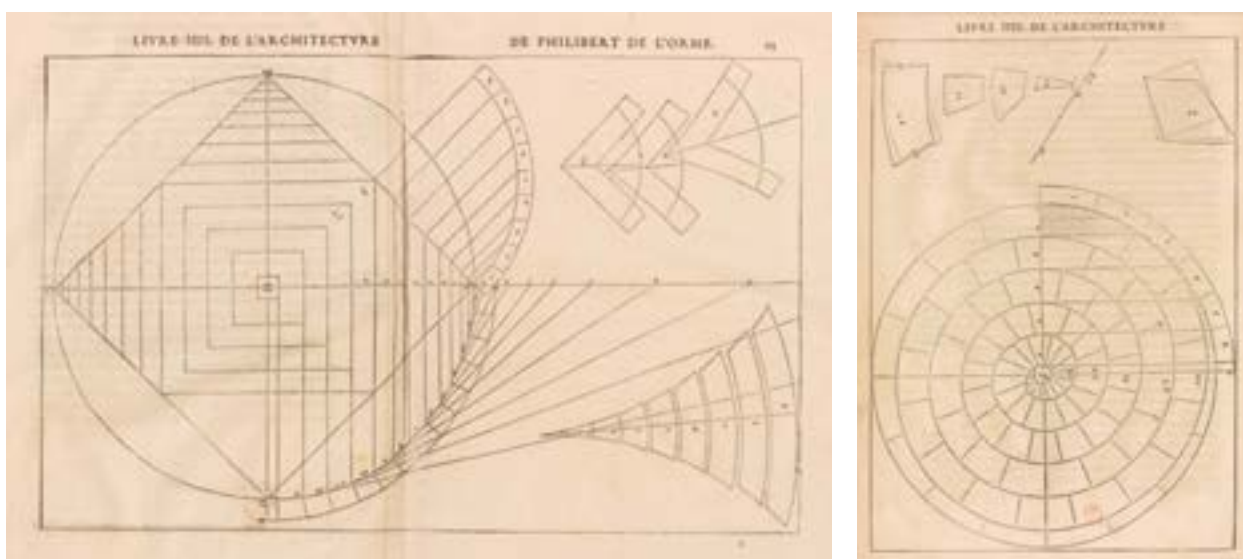


Figura 2.5. Izquierda: bóveda vaída por hiladas paralelas. Derecha: voute en forme de coquille de limaçon (bóveda en forma de caracol), *Le premier tome de l'Architecture*, Philibert de l'Orme, 1568, fol. 113r, fol. 119v, BnF Gallica.

distantes, y por tanto no puede ser una hélice esférica la que está representando (Cabezas-Bernal, Cisneros-Vivó, 2020). El problema que esta disposición genera es que al proyectar la espiral verticalmente sobre la semiesfera, debido al cambio de la pendiente en la superficie, comprobamos que el tamaño de las dovelas de la parte baja de la cúpula es mucho mayor que el de las que se encuentran cerca de la clave. Tratando de disimular este efecto, el autor falsea el alzado dividiendo la pieza de arranque en dos, pero no se corresponde con la planta y por ello más parece una construcción erudita, deducida de otros documentos, que una aplicación práctica conocida de primera mano por el autor.

Uno de los documentos más destacados de finales del xvi, tanto desde el punto de vista constructivo como gráfico es el tratado de Alonso de Vandelvira (ca. 1590). Es el primer texto que se dedica exclusivamente a la estereotomía. Alonso fue hijo del arquitecto andaluz Andrés de Vandelvira y escribió el tratado denominado *Libro de traças de cortes de piedra* (Vandelvira et al., 2015), que recopila los conocimientos de la época sobre cantería. Este tratado ha desaparecido y nos quedan dos copias manuscritas. Tuvo gran difusión en su época, y testigo de ello son las monteas² que aún hoy se conservan (López Mozo, 2008). Una de Felipe Lázaro de Goiti (1646) y otra de Sombigo y Salcedo (1671).³ El texto se organiza en 104 títulos que exponen las técnicas de trazas, pechinas, cimbras, arcos, troneras, capialzados, escaleras de caracol y cúpulas (que el autor denomina *capillas*). Este trabajo es de gran interés para la historia de la construcción, ya que es un testimonio del establecimiento de la estereotomía como ciencia (Aranda Alonso, 2015).

El libro se ordena en función de la dificultad que la aplicación de las enseñanzas supone para el aprendiz, tiene una orientación didáctica y no meramente expositiva. Cada caso prepara al lector para ejemplos que llegan después, se plantea la secuencia de láminas casi como un curso a seguir de manera continua. Los casos más complejos se apoyan en las explicaciones de ejemplos previos. Los dibujos son muy sintéticos, superponiendo los trazados y la definición de las plantillas de corte. Es interesante comentar que el autor se refiere a sí mismo como *can-*

tero y no como *arquitecto*, y tanto la cantidad de ejemplos que incluye en su texto, como la precisión en las descripciones confirman su dominio del oficio.

Vandelvira denomina *pechinas* a lo que Philibert de l'Orme denomina *trompas* (Figura 2.6). Se incluye la descripción de la pechina cuadrada, pechina carpanel, sesgada u oblicua, escarzana, por aristas, etc. Una completa gama de soluciones en las que se incluyen los trazados de la planta, el arco de testa y las plantillas de las dovelas. La superficie es un cono o conoide formado por generatrices que se apoyan en la directriz de la curva de borde, en general un arco al aire, las impostas en ángulo recto y vértice en la esquina.

Entre los arcos destacan el de la *Puerta en esquina y rincón* y el arco en torre cabada y redonda (Figura 2.7). En ambos casos la definición de las plantillas es más compleja que en los arcos comunes ya que es necesario generar una para cada cara vista y también para las que se enfrentan en las juntas. Las explicaciones de Vandelvira son casi totalmente gráficas, superponiendo planta, alzado y plantillas y relacionando las distintas construcciones.

Las escaleras ocupan un espacio importante en el trabajo de Vandelvira, especialmente las de caracol o helicoidales. En estos casos, el mayor esfuerzo se concentra en la definición del peldaño, una pieza de piedra apoyada en dos hélices. Incluso vemos que se incluye una proyección en perspectiva oblicua para representarlo. Por ejemplo, el Caracol de Mallorca es una estructura que se apoya sobre el muro cilíndrico perimetral y deja libre el ojo central, arrollándose en torno al cilindro vacío y formando con la moldura de remate el llamado *husillo* o cordón labrado de ese borde interior. El autor propone dividir el radio del cilindro de la escalera en seis partes: una es el hueco, otra la moldura y cuatro partes toma el paso del propio peldaño, lo cual hace que la moldura sea muy potente (Sanjurjo Álvarez, 2015). La cara inferior del peldaño será un helicoide cilíndrico recto, una reglada de plano director horizontal.

Vandelvira también incorpora un gran número y variedad de cúpulas, que denomina *capillas*. Cúpulas esféricas, ovales, tóricas, triangulares, por cruces, por aristas, etc. Las bóvedas de arista y las vaídas se agrupan en el apartado Capillas cuadradas, o Capillas prolongadas, cuando la planta es rectangular. Nos interesa especialmente la cúpula esférica por representar, según el propio tratadista, la arquitectura al romano, frente al moderno y ser el modelo principal en el que se basan los procedimientos del resto de variantes. Las dovelas de esta cúpula presentan seis ca-

2. Monteas: dibujo a tamaño natural del trazado de cantería que se hace en obra para sacar plantillas de arcos o bóvedas.

3. La copia de Felipe de Goiti se encuentra en la Biblioteca Nacional de España y se puede consultar *on line* en la Biblioteca Digital Hispánica. La copia de Bartolomé Sambigo y Salcedo está en la Biblioteca de la ETSAM (UPM) y también es posible consultarla a través de la biblioteca digital de Universidad Politécnica de Madrid.

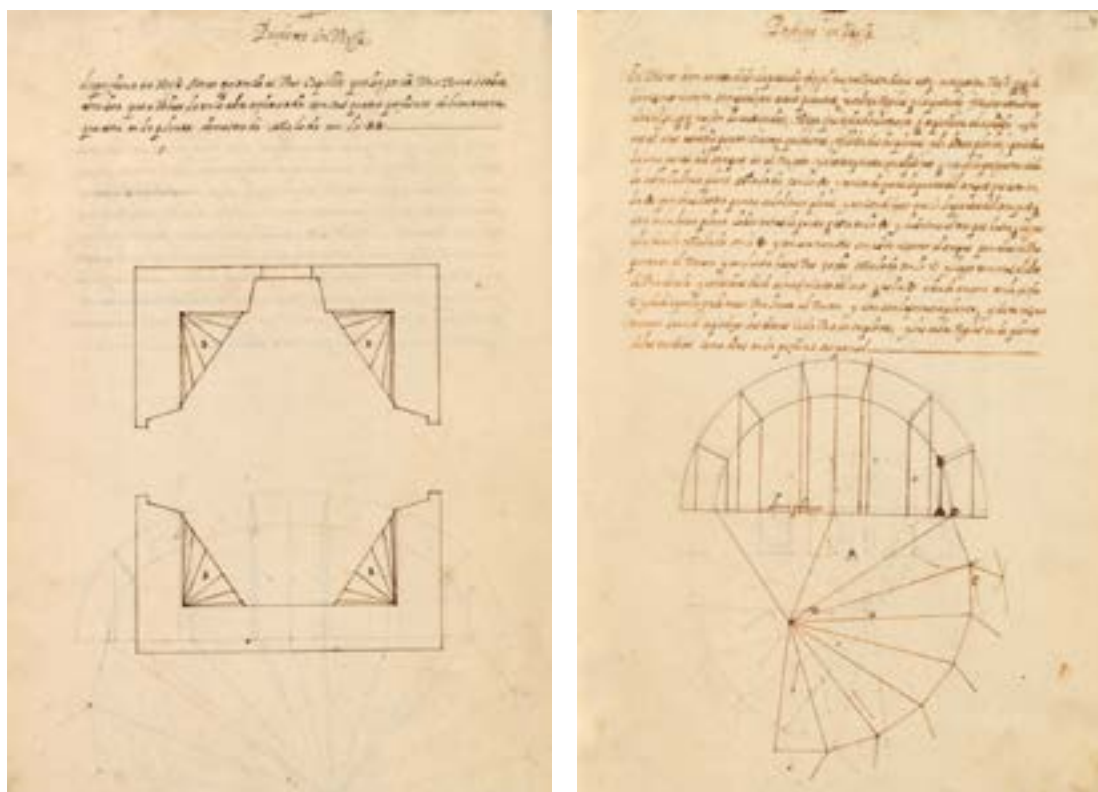


Figura 2.6. Pechina en viaje (pechina oblicua), *Libro de cortes de cantería*, Alonso de Vandelvira, ca. 1590, fol. 6r, fol. 7r, Biblioteca Digital Hispánica.

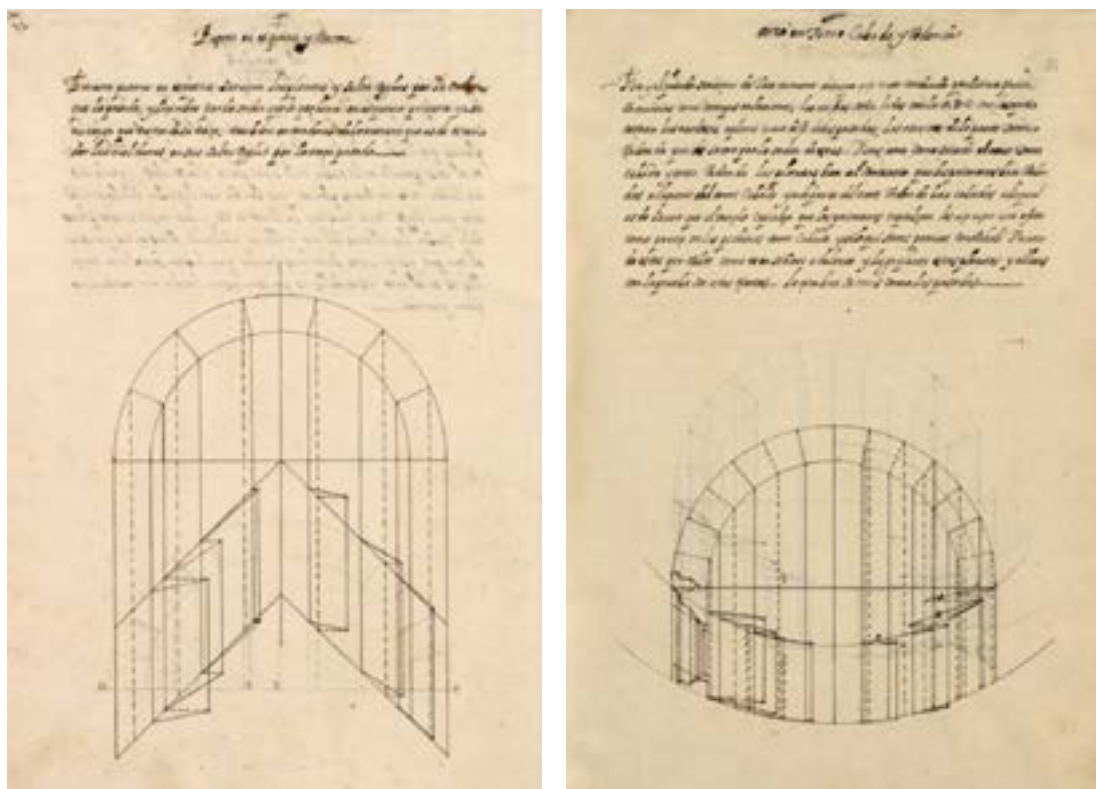


Figura 2.7. Izquierda: puerta en esquina y rincón (arco en esquina). Derecha: arco en torre cabada y redonda (arco en muro curvo). *Libro de cortes de cantería*, Alonso de Vandelvira, ca. 1590, fol. 31r, fol. 34r, Biblioteca Digital Hispánica.

ras, el intradós, cara vista que se talla con el radio de la esfera, el extradós, de acabado también esférico, pero más basto, pues no va a ser visto, las caras laterales, contenidas en planos verticales y los lechos, superior e inferior, que son superficies cónicas. Estos conos tienen el centro coincidiendo con el de la esfera.

Para controlar la forma de las dovelas, los canteros utilizan plantillas. Como la esfera no es una superficie desarrollable hay que aproximarla a una cercana que sí lo sea, como el con°. De modo que trazando un cono tangente en cada hilada se definen las líneas de las juntas. Las líneas laterales se sustituyen por las generatrices del cono, y las curvas de las juntas superior e inferior por arcos directrices de este, que sí coinciden con las curvas de los paralelos de la esfera. Definida la geometría de la cúpula, se traslada a las dovelas, primero se redondea la cara vista de la piedra, usando la cercha, después se delimita con la plantilla y el resto de las caras se tallan usando el baivel.⁴

La capilla en Vuelta de Capazo del tratado de Vandelvira es un logro geométrico notable (Figura 2,8). Para trazar la hélice el autor se auxilia de una proyección vertical en la que plantea una división de la esfera en 56 paralelos, mientras en la planta, coordinada con el alzado, dibuja 16 meridianos. La curva helicoidal va uniendo los puntos de intersección consecutivos entre paralelos y meridianos. Esta curva, según Cabezos y Cisneros (2020), se denomina *Clelia*⁵ y fue matemáticamente descrita en 1728, casi un siglo y medio después de que Vandelvira la dibujara. Aunque no es exactamente igual, dentro de este grupo de curvas, se encuentra la línea loxodrómica, una curva de navegación de gran interés, que el matemático portugués Pedro Nunes publicó en su *Tratado de la navegación* en 1546,⁶ cuya característica es que el ángulo entre la curva y los meridianos es constante.

Terminando el siglo, aparece el manuscrito *Cerramientos y Trazas de Montea* (ca. 1600), de Gi-

nés Martínez de Aranda, que trata los problemas geométricos de la construcción en piedra (Calvo López, 2009). Muy influido por los textos previos muestra un dominio de las habilidades constructivas propio de un maestro de obra. Aunque no fueron publicados por el autor, sus trabajos tienen un carácter gráfico propio. Los dibujos son parcos en detalles y reconocibles por enmarcar cada lámina con un fino ribete decorado. Dedicó especial atención al trazado de arcos y capialzados, aunque también describe lunetos y escaleras de caracol (Figura 2.9).

2.2. Siglos XVII y XVIII

L'Architecture de Voutes, ou l'art, traits et coupes de voutes, de François Derand (1643), es un tratado de estereotomía en el que se describen trazas para la construcción de bóvedas, arcos, trompas, etc. Derand dedica una importante parte de su texto a la descripción del abovedamiento de los pasos dentro de los muros, bien sean ventanas o puertas. Recoge los capialzados tradicionales, superficies configuradas como regladas alabeadas axiales.

El *Biaise passé* o paso oblicuo une dos arcos de circunferencia no enfrentados entre las dos caras del muro. Como ya se ha explicado, esta superficie se genera con un haz de planos sobre el eje perpendicular al muro, trazado en el encuentro de las diagonales de la planta. El resultado da la sensación de retorcer el espacio del paso. El *cuerno de vaca* es una bóveda que une dos arcos de medio punto, pero de radios diferentes. Este abocinamiento también se traza creando un haz de planos, de manera similar al del paso oblicuo. De hecho, a partir del siglo XVIII ambos capialzados se confundirán y serán considerados dos variantes del mismo tipo. Otros pasos como el capialzado de Marsella o el de San Antonio, también se recogen en este texto.

Las bóvedas por arista se forman por la intersección de dos cilindros horizontales bitangentes, es decir, que tienen dos puntos comunes sobre un diámetro, aunque solo vemos uno, en la clave, pues el cañón se materializa solo con la parte superior del cilindro (Figura 2.10). Es una solución tradicional que los tratados de cantería recogen con asiduidad. Mientras la esfera se suele reservar para espacios centrales, los cilindros en forma de bóveda de arista ofrecen una solución asociada a los espacios rectangulares, naves centrales o más laterales o espacios de paso, como los deambulatorios de los claustros.

4. El baivel es una falsa escuadra, con un brazo curvo, del mismo radio que la esfera y otro recto, que se va apoyando en los lechos laterales y la cercha es una regla de madera con un lado curvo, cuyo radio también coincide con el de la cúpula.

5. La curva denominada *Clelia* fue descrita por Luigi Guido Grandi en 1728, en honor a condesa Clelia Grillo Borromeo.

6. En la proyección cartográfica de Mercator (1569) las rutas de rumbo constante o loxodrómicas se representan como rectas. Este sistema propone proyectar tanto meridianos como paralelos desde el centro de la esfera terrestre sobre un cilindro tangente en el ecuador, lo cual produce mayores distorsiones cuanto más se aleja de este lo representado. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, para un marino desde el siglo XVI al XVIII, bastaba trazar una línea recta entre dos puntos y medir el ángulo con la vertical, que indicaría el norte, para encontrar el rumbo, lo cual resultaba de extraordinaria utilidad.

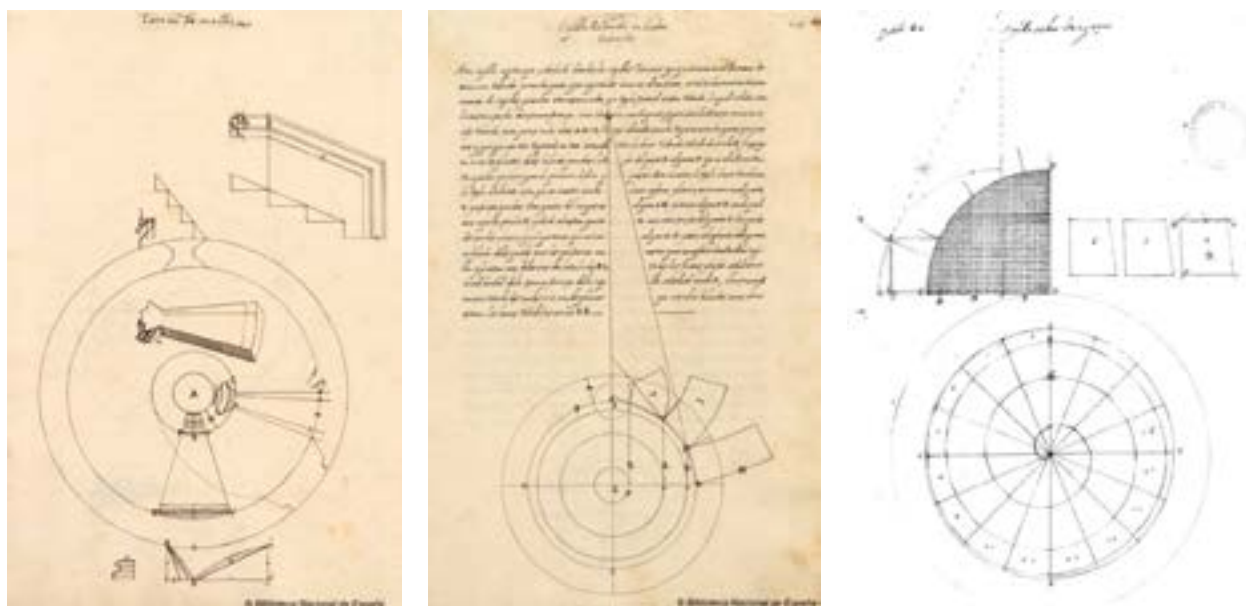


Figura 2.8. Izquierda: Caracol de Mallorca. Centro: capilla redonda en vuelta redonda (cúpula esférica). Derecha: capilla en vuelta de capazo, *Libro de cortes de cantería*, Alonso de Vandelvira, ca. 1590, fol. 94v, fol. 118r, fol. 68r, Biblioteca Digital Hispánica.

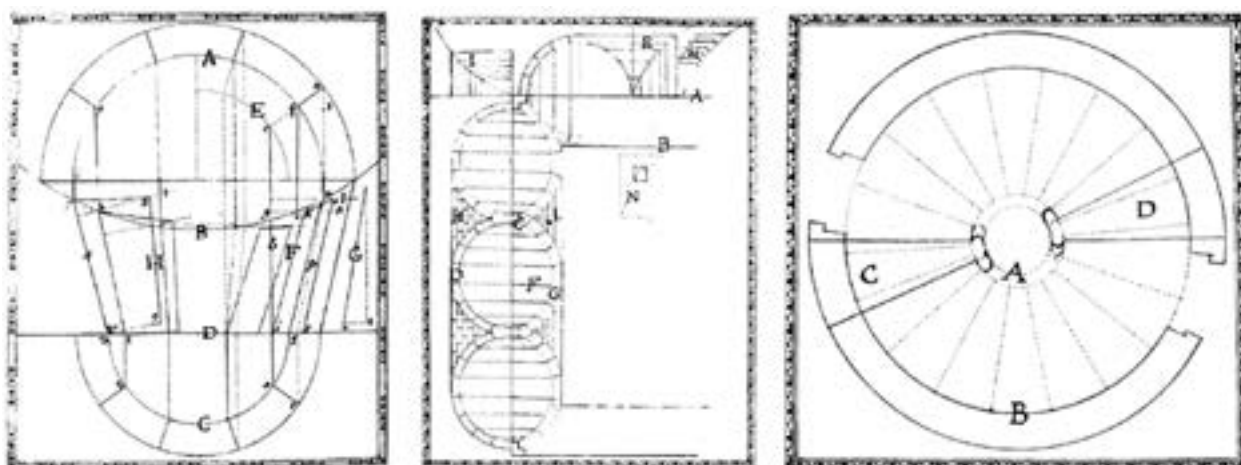


Figura 2.9. Cerramientos y trazas de Montea, Ginés Martínez de Aranda, ca. 1600, fol. 104r, fol. 112r, fol. 249r.

En general, para cubrir un rectángulo se mantiene el cilindro de menor radio con directriz circular pasando el cañón de mayor anchura a una curva rebajada, elíptica u oval. En el caso de Derand, es interesante remarcar la solución que propone es la contraria a la general, peraltando el arco del cilindro de menor radio (Senent Domínguez y Pérez de los Ríos, 2013). El dibujo, tanto de las curvas intersección, que teóricamente serían elipses, como de las rebajadas o peraltadas en su caso, se calcula por puntos.

Es bien conocido por el uso de la perspectiva como recurso gráfico el tratado de Jean-Baptiste de la Rue (1728) *Traité de la coupe des pierres*. Acompañando la descripción planimétrica de los trazados elabora lo que parecen ser perspectivas caballerías,

que le permiten ver las piezas a tallar con el canto de frente, añadiendo con maestría la profundidad necesaria para comprender de un vistazo el trabajo de talla. El sombreado complementa la vistosidad de las láminas. También hace un cuidado uso de los grosores de línea, que enriquecen las imágenes generando una jerarquía en la información que hasta este momento estaba apenas intuita.

Sabemos que en la École Polytechnique tuvo mucha influencia este tratado, aunque solo se reprodujeron los dibujos de aparejos, rechazando las perspectivas, que no se consideraban al mismo nivel científico que el sistema de proyección que hoy denominamos *sistema diédrico* (Rabasa, Enrique, Gentil, 1996) y que en ese centro se imponía.

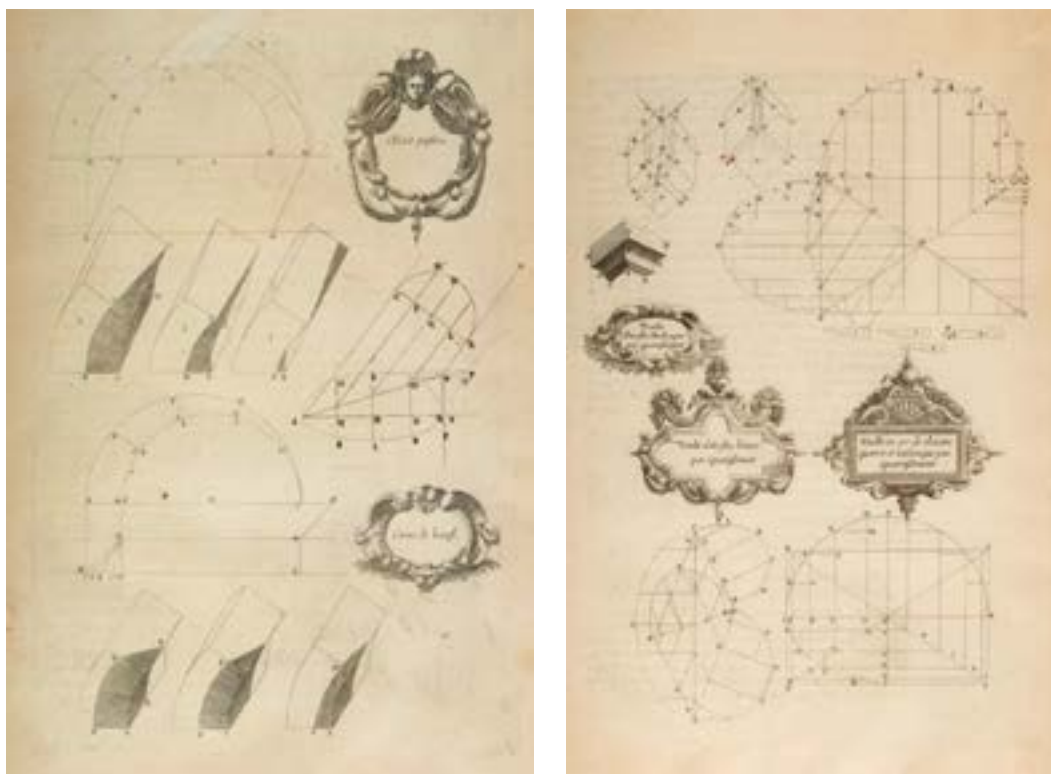


Figura 2.10. Izquierda: *Biais passé* y *Corne de boeuf* (Paso oblicuo y Cuerno de vaca). Derecha: bóvedas por arista. Le premier tome de l'Architecture, François Derand, 1568, fol. 121r, fol. 337, BnF Gallica.

Este libro incorpora soluciones de geometría plana y estereotomía de arcos, capialzados, lunetos, bóvedas por aristas, bóvedas de rincón de claustro, cúpulas esféricas, bóvedas anulares, vaídas, trompas, nichos, escaleras y una última parte dedicada a la geometría del cono. Todavía muy ligado a las prácticas de cantería, describe con claridad trazados y elementos de geometría compleja, pero es apreciable el esfuerzo por expresar las curvas y superficies generadores de los cuerpos, integradas en dibujos tridimensionales.

Sobre los capialzados tradicionales, De La Rue afirma que el Paso oblicuo (*Biais passé*) se puede considerar como un Cuerno de vaca (*Corne de boeuf*) doble, y en adelante ambos tipos se tratarán como uno solo, aunque los presenta como separados. Los dos son descritos como regladas, como lo es también el capialzado de Marsella, mientras el de San Antonio, curiosamente, se dibuja como superficie curva, transición cóncava entre directrices o red de curvas.

Entre las bóvedas encontramos una notable variedad. En las de arista se puede observar la proyección horizontal, sobre la cual se despliegan los arcos de borde (Figura 2.11). Al ser una planta rectangular, uno de los arcos es rebajado con el fin de que los dos cilindros sean tangentes en la generatriz

superior. También se dibuja la elipse diagonal, elevada por puntos y distintas posiciones de las saltarreglas, mostrando los ángulos de las dovelas.

Un caso destacado es la denominada *Voute d'Areste en Tour ronde*. Una solución para las bóvedas de galerías circulares. Sobre la superficie tórica se realizan arcos que son regladas conoides, que las atraviesan en dirección radial. Es interesante subrayar la forma de las curvas de intersección, que en planta aparecen como arcos diagonales, es decir, se entiende que no son curvas planas, sino cuárticas. También nos interesa la bóveda anular sobre un pilar central, en la que hace uso de la perspectiva militar, integrando en un mismo dibujo todos los contenidos que considera necesarios.

La *Vis Saint Gilles ronde* es una bóveda helicoidal para escaleras de caracol que plantea una enorme dificultad de traza (Figura 2.12). Sobre la hélice perimetral y el pilar central de la escalera, se apoya una sección semicircular que define la bóveda helicoidal en su desplazamiento. Presente en la mayoría de los tratados franceses desde el siglo XVI, buena parte de los autores subrayan la dificultad de este modelo, que toma su nombre de la escalera de caracol de la abadía de Saint Gilles, lugar al que viajaban los canteros para conocerla (Sanjurjo Álvarez, 2015). Cada punto de la curva generatriz produce una héli-

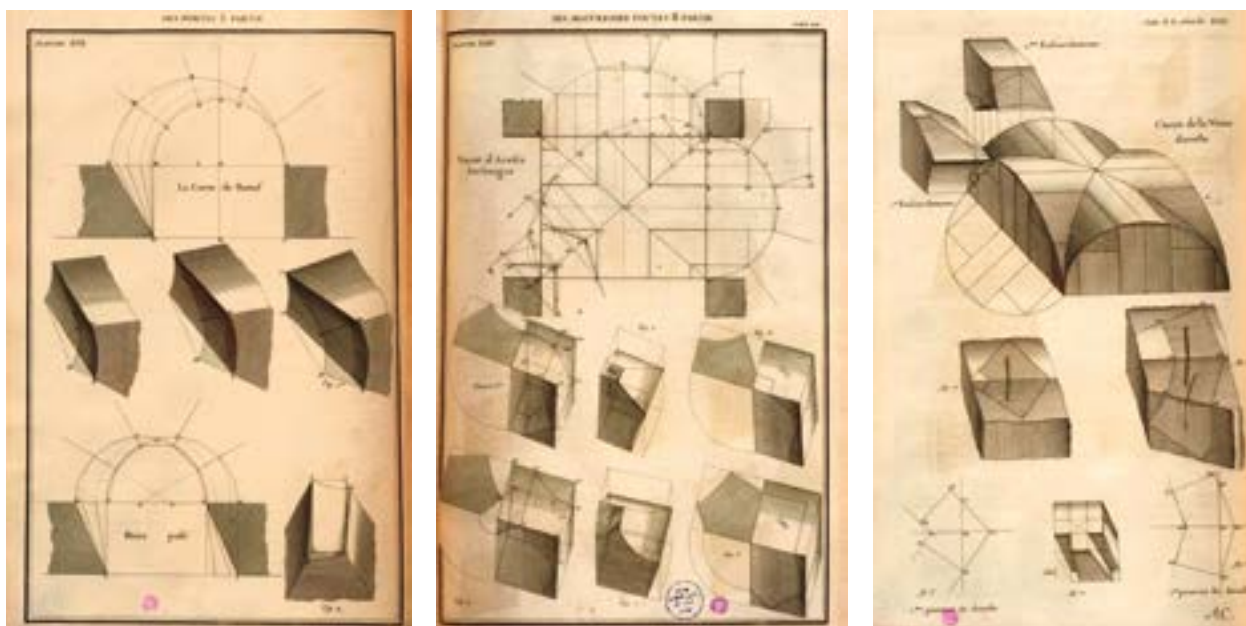


Figura 2.11. Izquierda: *Corne de Boeuf* y *Biais Passé*. Centro y derecha: *Voute de arestes*. *Traité de la Coupe des Pierres*, Jean Baptiste de la Rue, 1728, pl. 17, pl. 22, pl. 24. El trazado de la esteretomía se complementa con gráficos explicativos, tanto del conjunto de las superficies, como entidades tridimensionales abstractas, como de la definición de cada una de las piedras.

ce distinta. Cuanto más cerca del eje, la pendiente de la hélice será mayor y la dovela estará más alabeada. Las dovelas serán todas distintas en la sección transversal, mientras que serán iguales en el recorrido de la hélice. Las juntas de los lechos entre dovelas de la misma hilada (en sentido de subida) son representa-

das como verticales, aunque esto va en contra de la máxima de la cantería pues produce aristas con ángulos agudos. Probablemente, en la práctica estas dovelas tengan sus juntas en planos inclinados.

El tratado de Amédée Frézier (1737) es el primero que utiliza el término *esteretomía* en su título. En

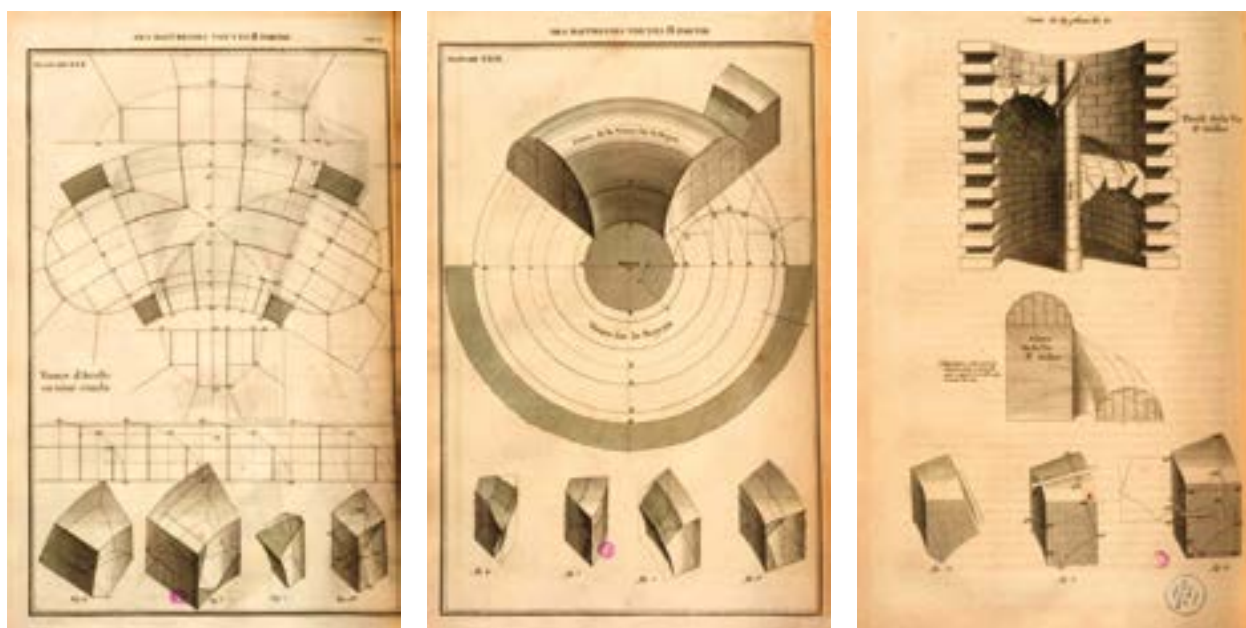


Figura 2.12. Izquierda: *Voute d'arete en tour ronde*. Destaca la definición cuidadosa de las curvas intersección de cono y toro, como curvas tridimensionales. Centro: *Voute sur le noyau*. Cubre un espacio circular con un apoyo central con una bóveda anular, es decir un toro de directriz el círculo de la planta sobre la que revoluciona el semicírculo de la sección. Ambas entidades son subrayadas por el dibujo con claridad. Derecha: *Voute de arestes*. El dibujo en perspectiva nos indica que el autor trataba de hacer comprensible no solo el proceso constructivo de los elementos, sino la riqueza espacial que estos generan.

Traité de la Coupe des Pierres, Jean Baptiste de la Rue, 1728, pl. 30, pl. 29, pl. 61.

aquel momento la estereotomía era el brazo abstracto y geométrico del Arte de la Trazas (Rabasa, Enrique, Gentil, 1996), la teoría que daría cuerpo a los programas de la École Polytechnique y sería un precedente casi directo de la geometría descriptiva. Se refiere tanto al corte de piedra como de madera, aunque este último es muy importante, alcanza menos relevancia en términos teóricos. La teoría de las superficies que conforman los cuerpos y los métodos de representación de las operaciones de corte son el cuerpo principal de la geometría descriptiva (Salvatore, 2011).

Lo primero que nos llama la atención del tratado de Frézier es que, respecto de los textos precedentes, este explica las superficies más como cuerpos y elementos abstractos. Publica su trabajo en varios tomos. En el primer volumen se muestran las propiedades fundamentales de curvas y superficies de manera didáctica. Se incluye un original estudio de las intersecciones entre cuádricas y de las propiedades proyectivas de las curvas cónicas y cuárticas, relacionadas directamente con estas superficies.

El tratado recoge un período de evolución del conocimiento del corte de la piedra en ciencia, en un momento en que otros campos estaban sufriendo una transformación similar. Tal era el caso de la geometría, las matemáticas, la física, etc. Hay una ambición de búsqueda de una teoría general que reduzca el número de soluciones, hasta entonces re-

presentadas por autores como Derand o De La Rue, a una serie de casos particulares de un mismo problema. Pensamiento acorde con propuestas como las de Desargues en matemáticas. Este trabajo es el primero en considerar la geometría gráfica y la analítica como dos expresiones de este hecho y los conocimientos del autor en ambos campos quedan demostrados en el texto.

Frézier consigue elevar este conocimiento gremial al nivel de ciencia, con reglas generales, aplicables a toda clase de problemas y esto se traslada a sus dibujos. Como ejemplo podemos observar que propone el uso de conos o cilindros, frente a superficies regladas como los tradicionales capialzados, despreciando un tanto la experiencia práctica, que desaconsejaba el uso de formas más puras, por su compleja aplicación. Las razones constructivas que guiaban los trazados tradicionales, como puede ser el evitar ángulos agudos en las dovelas o piezas terminadas en punta, no se tienen en cuenta, produciendo algunos modelos teóricos que rara vez se llegan a construir. Es una obra que se dedica a ingenieros y arquitectos como conocedores de la geometría, más que a constructores o canteros.

El primer libro del tratado comienza por las secciones planas de las superficies cuádricas, esferas, conos y cilindros, además de elipsoides, paraboloides y toroides (Figura 2.13). Debemos recordar

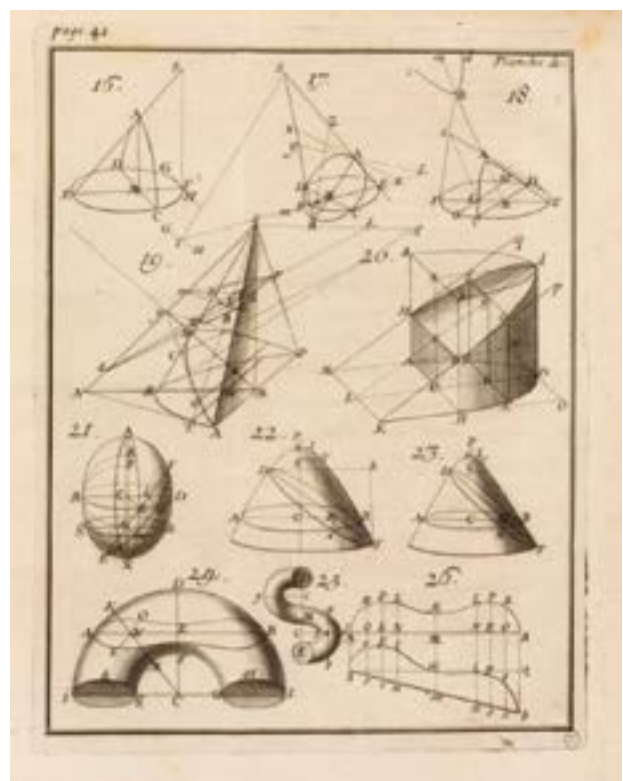
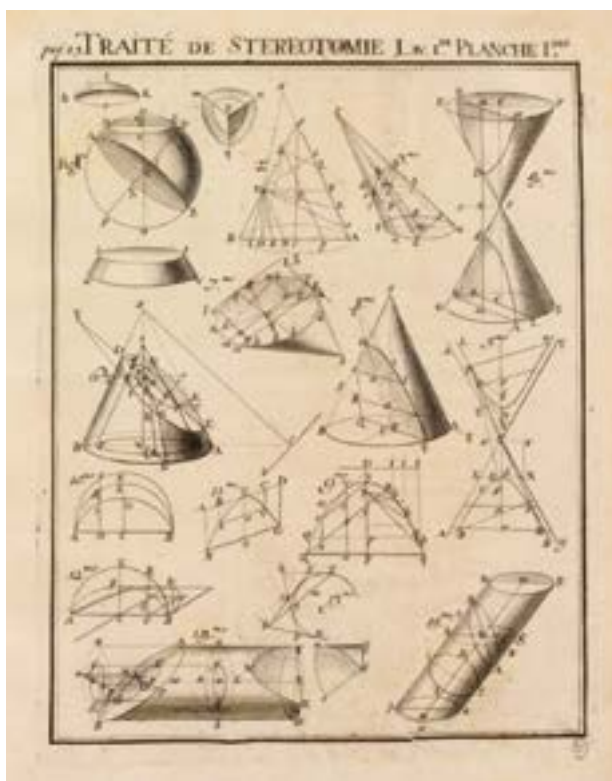


Figura 2.13. Curvas cónicas creadas por cortes planos, *Traité de stéréotomie*, Amédée Frézier, 1737, pl. 1, pl. 2, BnF Gallica.

que en ese momento ya eran conocidos los estudios en los que se explicaban las curvas cónicas, no obstante, el texto de Frézier ofrece soluciones a problemas que en ese momento eran discutidos, como la forma de definir un cono recto u oblicuo. Afirma, por ejemplo, que un cono circular oblicuo es lo mismo que un cono recto elíptico. También se ocupa de cuerpos huecos, como conos y cilindros, muy utilizados en cantería y albañilería. Demuestra que la sección plana de un cilindro elíptico hueco, cuyo espesor no es cero, está formada por dos elipses concéntricas, pero no equidistantes, pues dos elipses nunca pueden serlo.

La segunda parte del primer tomo contiene las contribuciones más innovadoras. Presenta las líneas de doble curvatura obtenidas por intersección de cuádricas (Figura 2.14, Figura 2.15, Figura 2.16 y Figura 2.17). El interés del autor se dirige a comprender morfológicamente todos los aspectos de la geometría de las bóvedas. Desde un punto de vista abstracto, se trata de clasificar todas las posibles intersecciones entre esferas, conos y cilindros. Concluye que hay tres tipos de curvas de cuarto orden: *cicloïmbre*, *ellipsimbre* y *ellipsoidimbre* (Salvatore, 2011) en función de las curvaturas que adoptan.

2.3. Siglo XIX

Gaspard Monge (Beaune 1746, París, 1818) recopila sus lecciones sobre geometría descriptiva en 1795. Son clases impartidas tanto en la École Normale como en la École Centrale des Travaux Publics, luego École Polytechnique. Las clases fueron recogidas por taquígrafos y no propiamente por el autor y son un compendio que se convirtió en un instrumento gráfico completo. La primera edición (1799) fue preparada por Hachette y editada por Baudoin (Monge, 1996).

Tal como dice Monge, la geometría descriptiva es un lenguaje racional, lógicamente estructurado, que unifica procedimientos gráficos particulares de los oficios y gremios. Es una lengua técnica universal de comunicación entre el que dibuja y el que interpreta los dibujos. Su intención política persigue los ideales de la revolución, la transformación social a través del conocimiento y la ciencia. En cuanto al adjetivo *descriptiva* (Rabasa, Enrique, Gentil, 1996), explican que en los textos de Monge *décrire* es sinónimo de dibujar o trazar y que *géométrie descriptive* habla de la descripción del dibujo que construye con líneas.

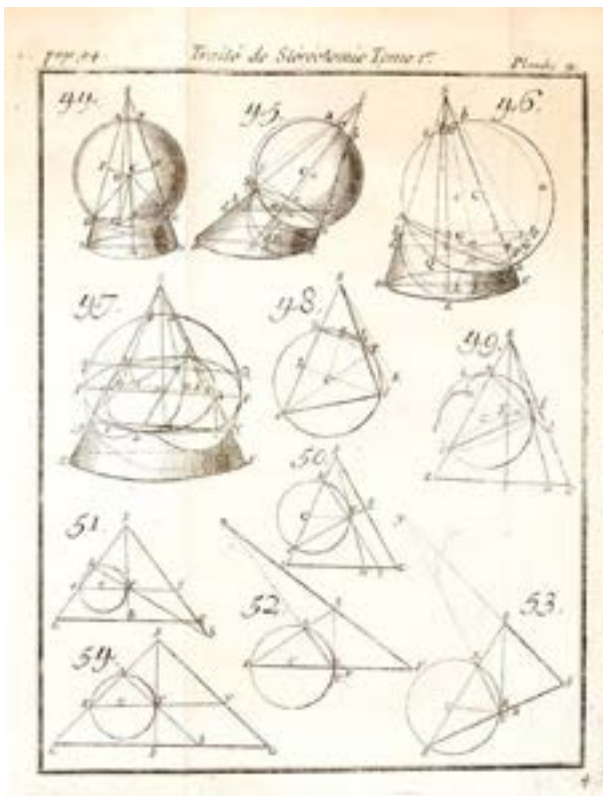
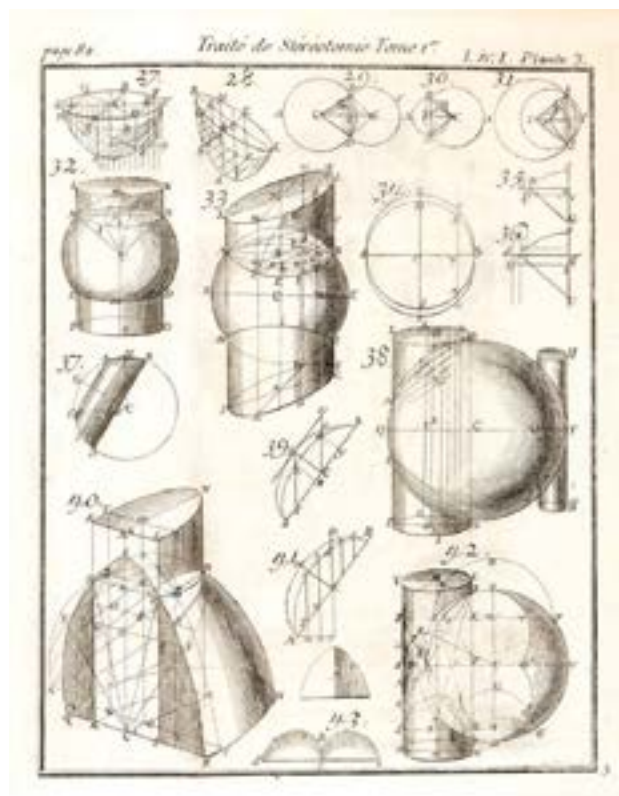


Figura 2.14. Cuárticas como intersecciones entre cilindros y esferas y entre conos y esferas, *Traité de stéréotomie*, Amédée Frézier, 1737, pl. 3, pl. 4, BnF Gallica.

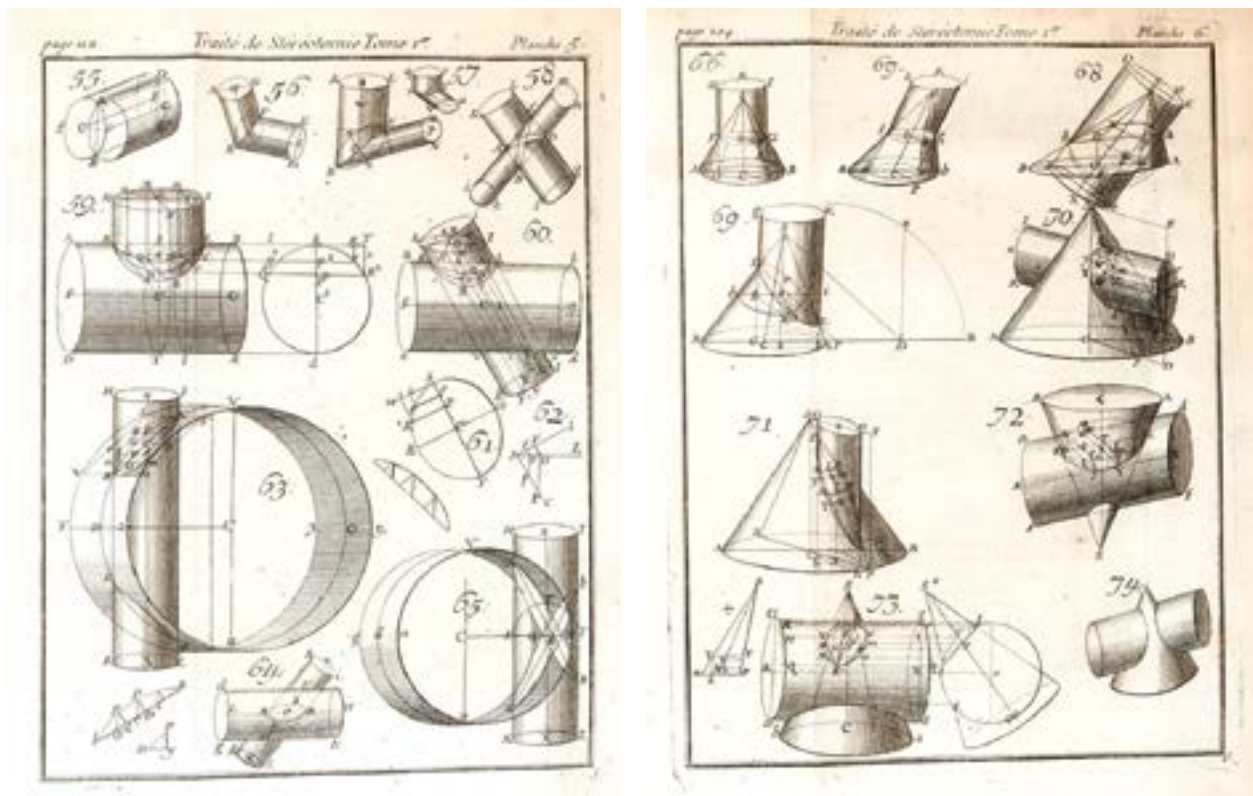


Figura 2.15. Intersecciones entre cilindros y entre conos y cilindros, *Traité de stéréotomie*, Amédée Frézier, 1737, pl. 5, pl. 6, BnF Gallica.

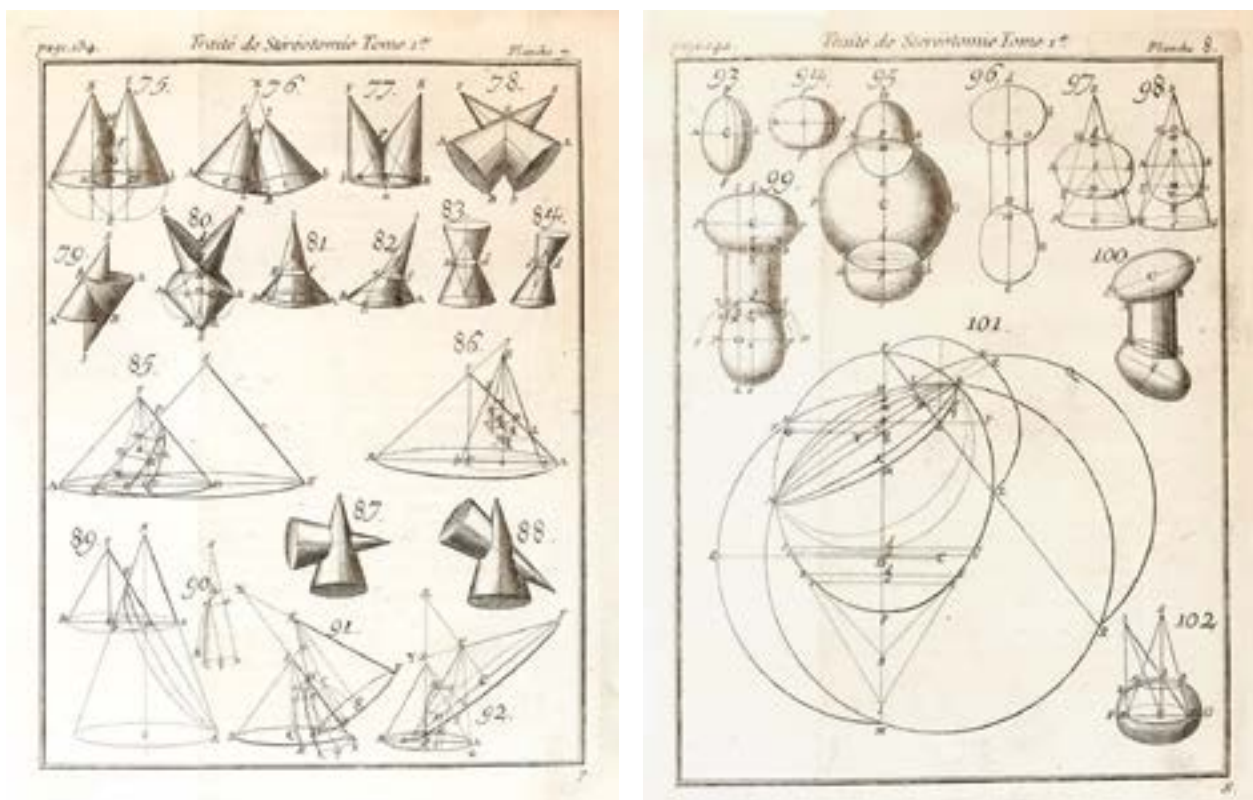


Figura 2.16. Intersecciones entre conos y entre elipsoides y otras cuádricas, *Traité de stéréotomie*, Amédée Frézier, 1737, pl. 7, pl. 8, BnF Gallica.

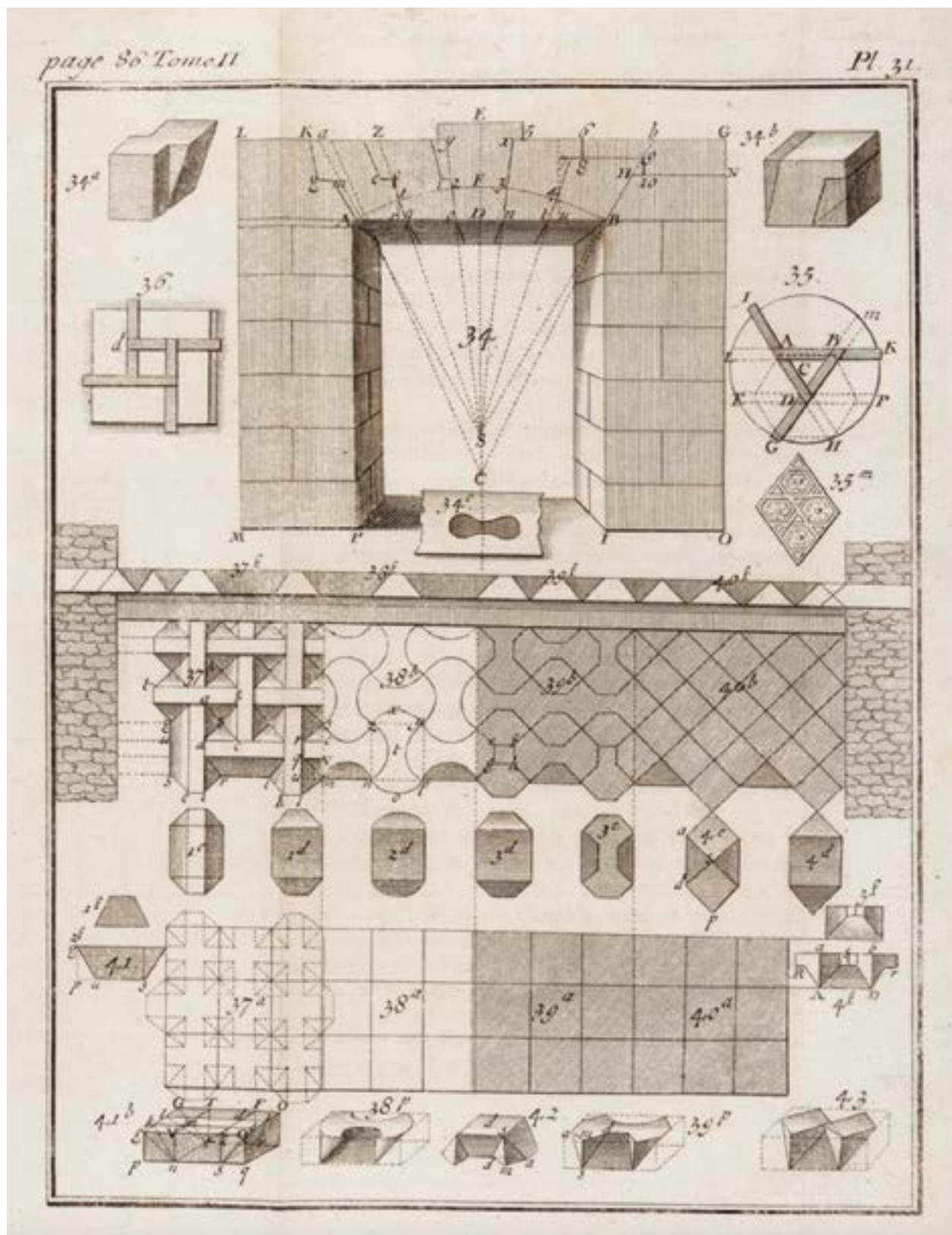


Figura 2.17. Bóveda plana y estructuras recíprocas, Amédée Freézier, 1737, pl. 31. Esta lámina es una curiosidad en la que el autor menciona la denominada bóveda plana de Abeille (1699), ingeniero francés, formada por piezas poliédricas obtenidas por corte de un tetraedro, que después se van haciendo más sofisticadas, adoptando un perfil similar al del hueso nazarí (mosaico).

El tratado de Monge funde los dos campos que hasta entonces habían producido dibujos, los de la perspectiva, asociados a la pintura y los trazados y los relativos a la estereotomía, proponiendo el uso de un sistema, con la simple combinación de planta y alzado, apto para resolver cualquier problema espacial. La fuerza de la idea de potenciar un sistema universal hace que en generaciones posteriores a Monge se llegara a criticar la rigidez con la que se aplicaban estas enseñanzas, que habían reducido la variedad de representaciones de la que previamente hacían gala los gremios. Hacia mitad del siglo XIX aparecieron alternativas al diédrico, como el método directo, que evitaba el uso de la línea de tierra, y por tanto la relación inmediata de los objetos con los planos de proyección.

Las láminas de Monge, además de explicar los fundamentos de las relaciones entre los elementos básicos de la gramática: punto, recta y plano, utilizan fundamentalmente el cono, el cilindro y la esfera para representar tanto su descripción como algunas intersecciones que entre ellos realiza. No se

encuentran referencias a las cuádricas regladas, que sí serían objeto de otros tratados posteriores como el de Vallée.

En su *Traité de la Géométrie Descriptive*, Louis Léger Vallée (Vallée, 1825) organiza las lecciones en varios capítulos denominados como «preliminares», «superficies curvas», «planos tangentes» e «intersección de curvas». Como complemento al texto se edita un volumen de láminas en las que se pueden seguir los problemas con un lenguaje gráfico auxiliado por letras (Figura 2.18, Figura 2.19 y Figura 2.20). Esta organización nos habla de una preocupación por la clasificación de los problemas según un enfoque más matemático, en el que destaca la importancia de las superficies cuádricas o de segundo grado, haciendo referencia a que sus ecuaciones incluyen términos elevados al cuadrado. Al igual que Monge, Vallée ya no muestra interés por representar las posibles aplicaciones de los objetos utilizados en sus lecciones. Las curvas y superficies son puros elementos abstractos, desligados de cualquier servidumbre constructiva.

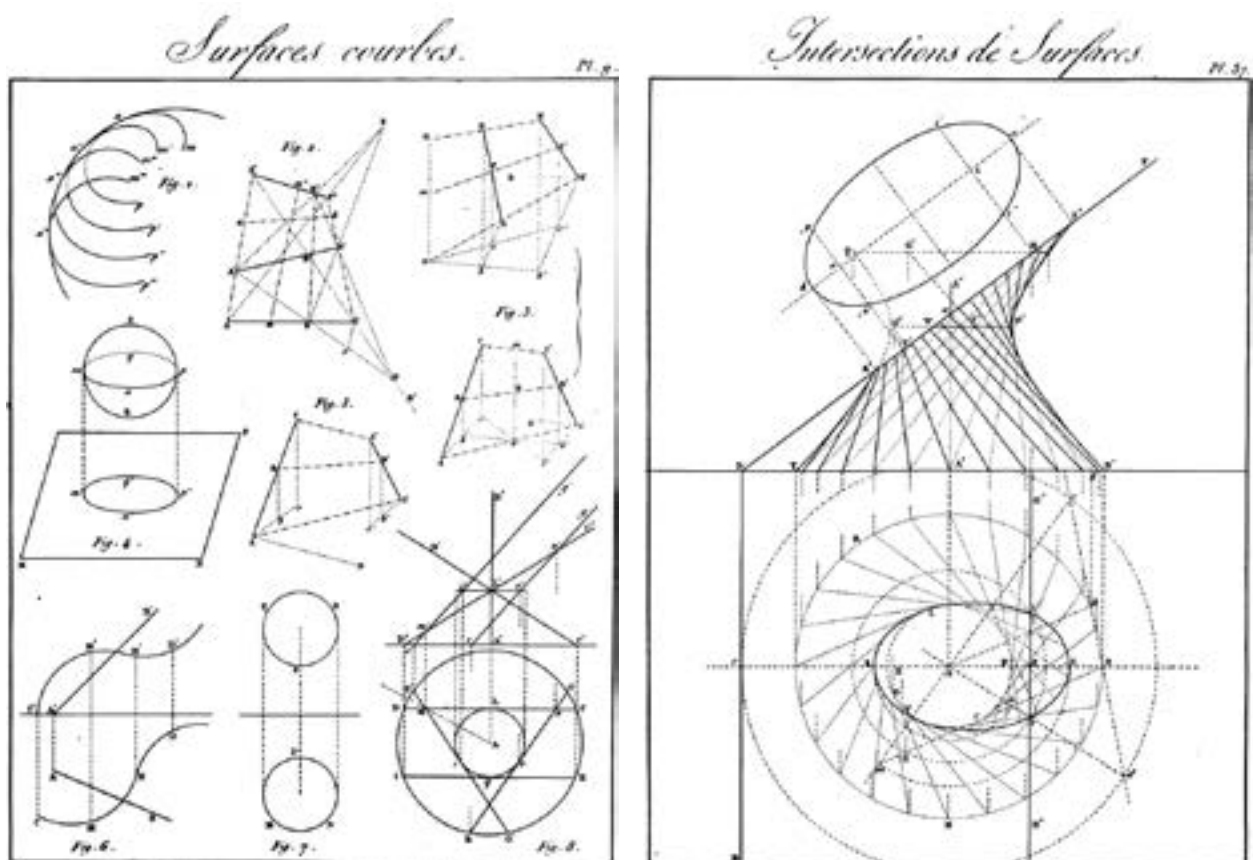


Figura 2.18. Izquierda: Superficies curvas. Destaca la explicación de las regladas alabeadas que se ilustran en la parte derecha de la lámina, arriba paraboloide hiperbólico, como cuadrilátero alabeado cuyos lados se dividen en partes iguales y debajo hiperboloide hiperbólico dado por rectas y círculo de garganta. Derecha: intersección de superficies. La intersección de un hiperboloide hiperbólico con un plano produce una elipse. Llama la atención que solo se representa una familia de generatrices de la superficie. L. L. Vallée, 1825, pl. 9, pl. 37.

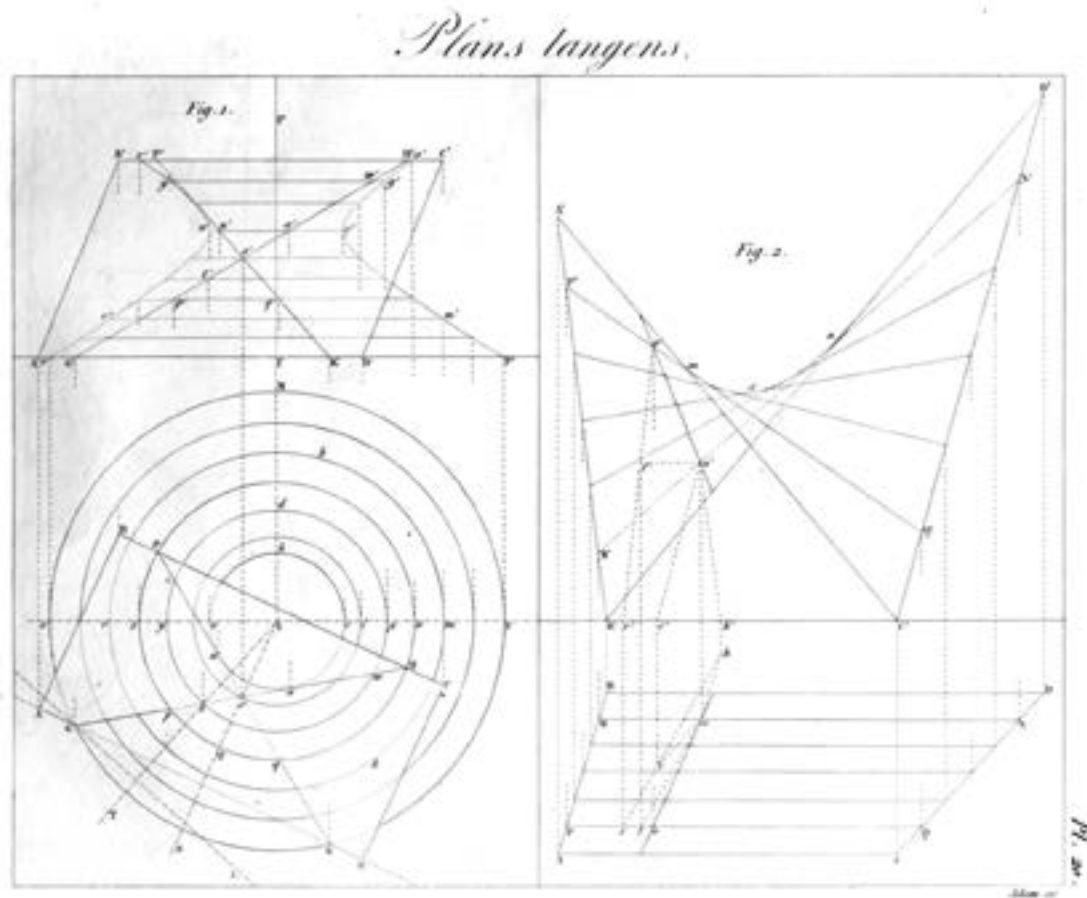


Figura 2.19. Planos tangentes, L. L. Vallée, 1825, pl. 20. De nuevo se utilizan las regladas para ejemplificar el plano tangente a una superficie en un punto, por el que pasan dos rectas, que pertenecen a ambos, superficie y plano tangente. El hiperboloide viene dado por circunferencias. El paraboloide se construye como un cuadrilátero alabeado que no se ve en planta como un paralelogramo lo que indica que el eje no es vertical.

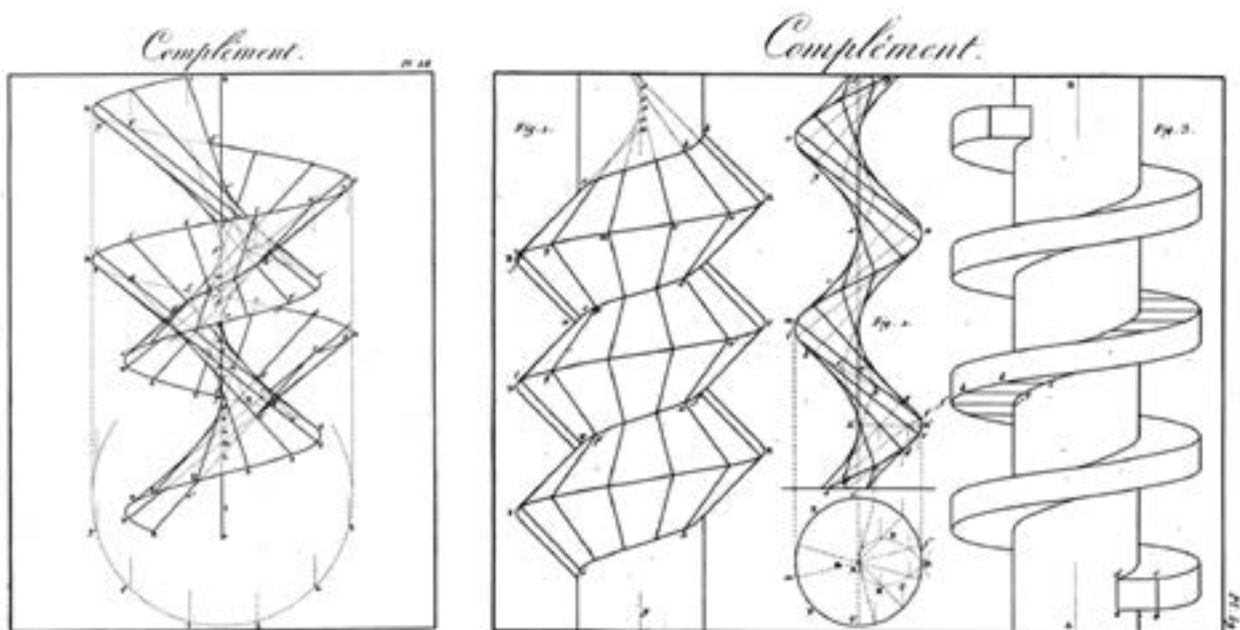


Figura 2.20. Helicoides, L. L. Vallée, 1825, pl. 58, pl. 59. Aquí se describen distintos tipos de helicoides, varios son oblicuos y el último recto y se alternan los cilíndricos y otro axial.

Entre los conoides hay una variedad destacable, en la que la generatriz, constantemente paralela a un mismo plano, se apoya en otras dos rectas como directrices. A estas superficies les dio el nombre de *paraboloides hiperbólicos* o *conoides de segundo grado*. Otra consecuencia interesante es que, del hecho de que las generatrices de un paraboloide hiperbólico sean paralelas a un mismo plano se deduce que dividen a dos directrices en partes proporcionales. También destaca que cualquier recta que se mueva sobre las mismas dos directrices, manteniéndose paralela al mismo plano director, seguirá engendrando el mismo paraboloide hiperbólico y que el papel de generatrices y directrices es intercambiable. Además, incluye entre las láminas varios dibujos de paraboloides hiperbólicos que ilustran las explicaciones y los enunciados de los problemas propuestos.

Gaudí entró en contacto con las superficies regladas cuando estudiaba geometría descriptiva en la Escuela de Arquitectura de Barcelona (1878), y para ello utilizó el texto de Charles Felix Auguste Leroy (Giralt-Miracle, 2002). Este tratado es un completo manual de geometría descriptiva, que añade a las lecciones de Monge magníficos dibujos de los objetos geométricos, tales como los poliedros, las superficies cuádricas, los métodos de dibujo de curvas cónicas, las intersecciones entre superficies y algo de topografía y engranajes (Leroy, 1842). Cuida, especialmente, el aspecto didáctico de su narración gráfica, intercalando perspectivas caballeras de las figuras, que facilitan la comprensión de las explicaciones por el carácter tridimensional de las mismas (Figura 2.21 y Figura 2.22).

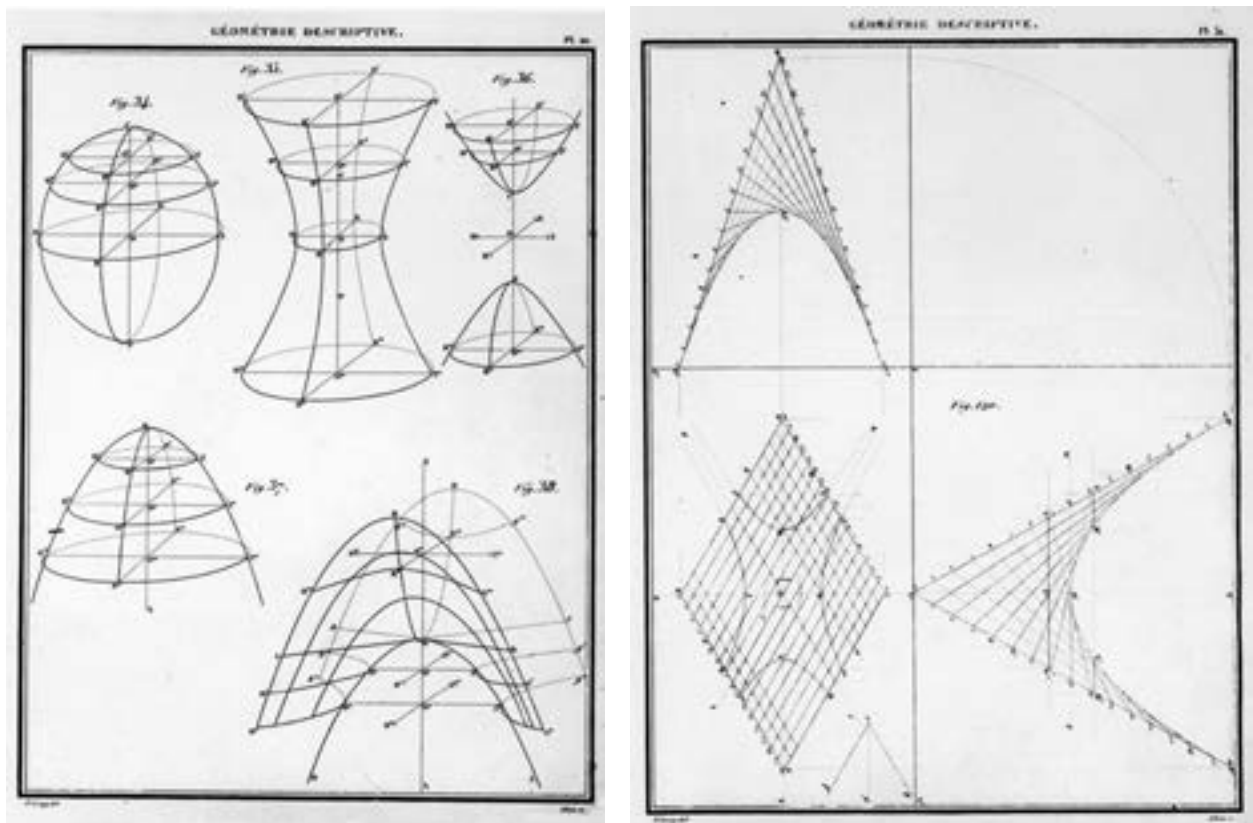


Figura 2.21. Izquierda: superficies cuádricas. La lámina representa las cuádricas de revolución, como el elipsoide de revolución, el hiperboloide hiperbólico y elíptico, el paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico, que aparece como transición entre parábolas. Derecha: paraboloide hiperbólico. Aquí se representa el paraboloide hiperbólico como un cuadrilátero alabeado, de planta un paralelogramo. Esto hace que el eje de la superficie sea vertical. Los lados de este se dividen en partes iguales y se unen correspondientemente. Las parábolas son los contornos aparentes de los alzados. Se incluyen también cortes horizontales que dibujan dos hipérbolas en planta, de las que se destaca que comparten las asíntotas, que son las generatrices principales. C. F. A. Leroy, 1842, pl. 10, pl. 51.

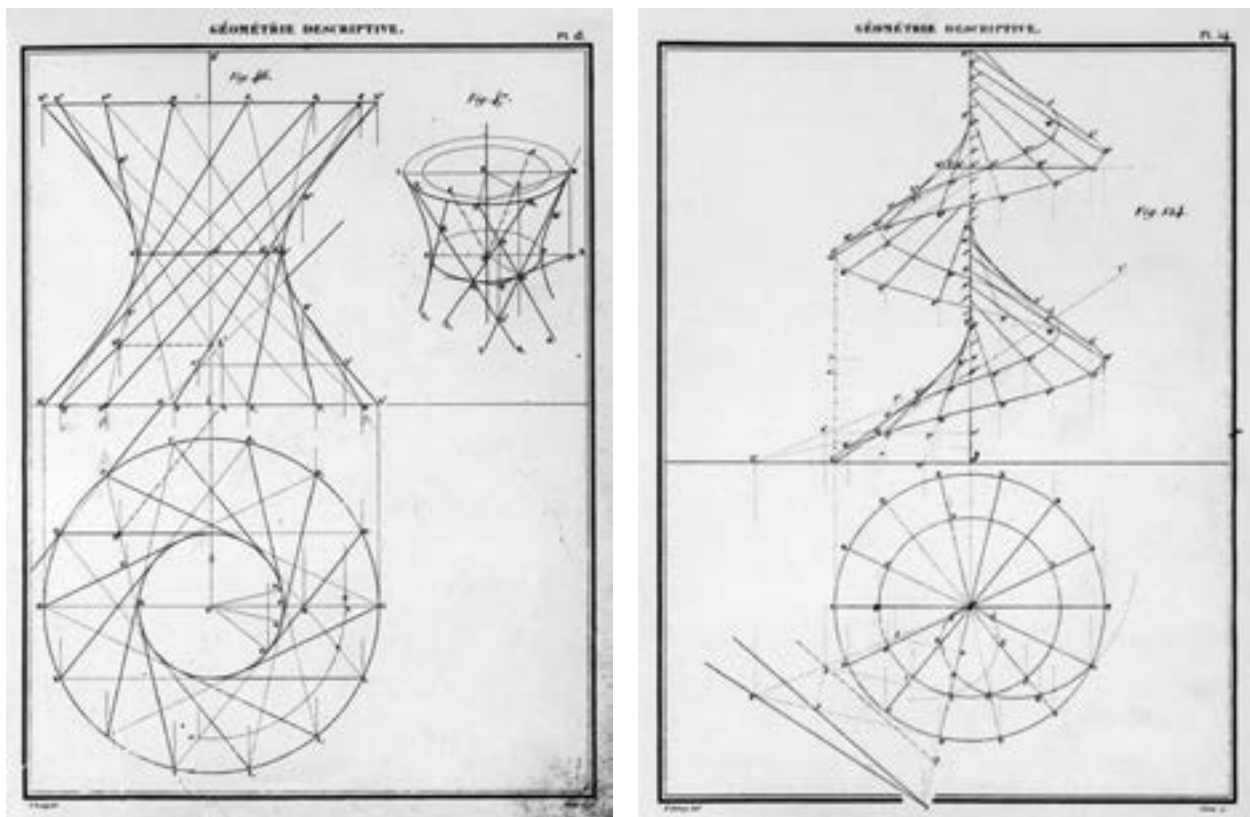


Figura 2.22. Izquierda: hiperboloide hiperbólico. Para construir el hiperboloide se divide la circunferencia en 14 parte (múltiplo de 7) lo cual supone un cierto alarde geométrico. En perspectiva se define el círculo de garganta y se apunta la formación del cono asintótico, aunque no se dibuja su contorno aparente.
Derecha: helicoide axial oblicuo, C. F. A. Leroy, 1842, pl. 15, pl. pl. 54.

3. AUTORES, OBRAS Y ANÁLISIS DE CURVAS Y SUPERFICIES

En este apartado vamos a tratar los casos de varios autores; arquitectos, ingenieros y diseñadores, que utilizan las curvas y superficies que nos interesan, de formas muy variadas, pero siempre con conocimiento de sus propiedades y basando el diseño en el control de los elementos definidores. Veremos casos de los pioneros que experimentan con cáscaras de hormigón nunca vistas hasta entonces, tales como Eugène Freyssinet, que hizo del pretensado un nuevo material, aliado del control de la forma y definió espacios que, sin pretenderlo, resultaron monumentales. Trataremos estudiosos de la capacidad expresiva de la geometría más pura, como Eduardo Torroja, que diseñó estructuras de grandes dimensiones y a la vez extremadamente esbeltas, desarrollando entre otros un novedoso sistema de prueba en modelos a escala. O casos como el de Félix Candela, autor que Billington define como *Master Builder and Structural Artist* (Garlock, Billington, 2009), y que nos hablan de una realidad compleja, en la que un arquitecto se enfrenta a la construcción de láminas de hormigón y además de diseñador de la estructura se convierte en calculista y contratista, arriesgando su patrimonio. Una figura muy alejada del concepto de arquitecto consultor que resulta más habitual en el ámbito profesional contemporáneo.

3.1. Antonio Gaudí

El interés de Antoni Gaudí (1852-1926) por las formas geométricas y su capacidad expresiva en la construcción lo llevó a experimentar de una forma totalmente innovadora, profundizando en sus propiedades desde una aproximación muy práctica, a través de modelos en los que ponía a prueba una y otra vez sus ideas. En el campo de la geometría descriptiva las superficies cuádricas regladas, como el paraboloide o el hiperboloide, por ejemplo, se conocían desde mucho antes, pero no se habían utilizado en edificación. Una de las grandes aportaciones de Gaudí a la arquitectura moderna es el uso constructivo de las superficies regladas (Alsina, Gómez-Serrano, 2002). Sabemos que conoció las regladas a

través del tratado de CFA Leroy (1842) y experimentó con ellas de muy diversas formas.

Como nos recuerda el profesor Alsina (2002) los conoides son superficies que «...quedan determinadas en el espacio por una recta, un plano perpendicular a ella y una curva. Están formadas por todas las rectas que se apoyan ordenadamente en la recta dada y en los puntos correspondientes de la curva fijada y todas las rectas son paralelas al plano dado». Los conoides, a diferencia de los conos no hacen pasar todas sus generatrices por un punto, sino por una recta directriz. Según esta idea, la definición de conoide incluye desde el plano, cuando la curva de apoyo es paralela a la dada, a los helicoides, cuando la curva es una hélice, o el paraboloide hiperbólico, cuando la curva se cruza en el espacio con la primera.

Gaudí utilizaba la palabra *planoide* para expresar la existencia de una arquitectura construida con superficies derivadas del alabeo del plano (Bassegoda-Nonell, 1994). Su afán innovador se trasladaba así también al lenguaje. La construcción de estas superficies no suponía una complicación para el arquitecto catalán. El replanteo de estas requiere tan solo el uso de unos listones no paralelos entre los que se colocarán las hiladas de ladrillo o piedra, alineadas con la ayuda de reglas o tendeles, formando una red de rectas y curvas. Es en su última etapa, entre 1914 y 1926, cuando el arquitecto desarrolla sus ideas sobre estas superficies, materializando las distintas soluciones en la obra de la Sagrada Familia (Figura 3.1).

Entre las superficies regladas que utilizó Gaudí están las sinusoidales, que forman las paredes y la cubierta de las Escuelas de la Sagrada Familia. La directriz recta de la bóveda es una viga central sobre la que se apoyan las viguetas de madera que se unen con fábrica de rasilla, siguiendo el perfil curvo de la coronación del muro. A su vez, los muros perimetrales arrancan de otra curva formada por arcos de circunferencia y tangentes rectas, que dan a todo el conjunto un aspecto muy dinámico. El edificio ha sufrido varias modificaciones y cambios en su estructura e incluso demoliciones y reconstrucciones que han modificado su configuración original (Adell, García Santos, 2005), pero sigue transmitiendo el carácter escultórico original.

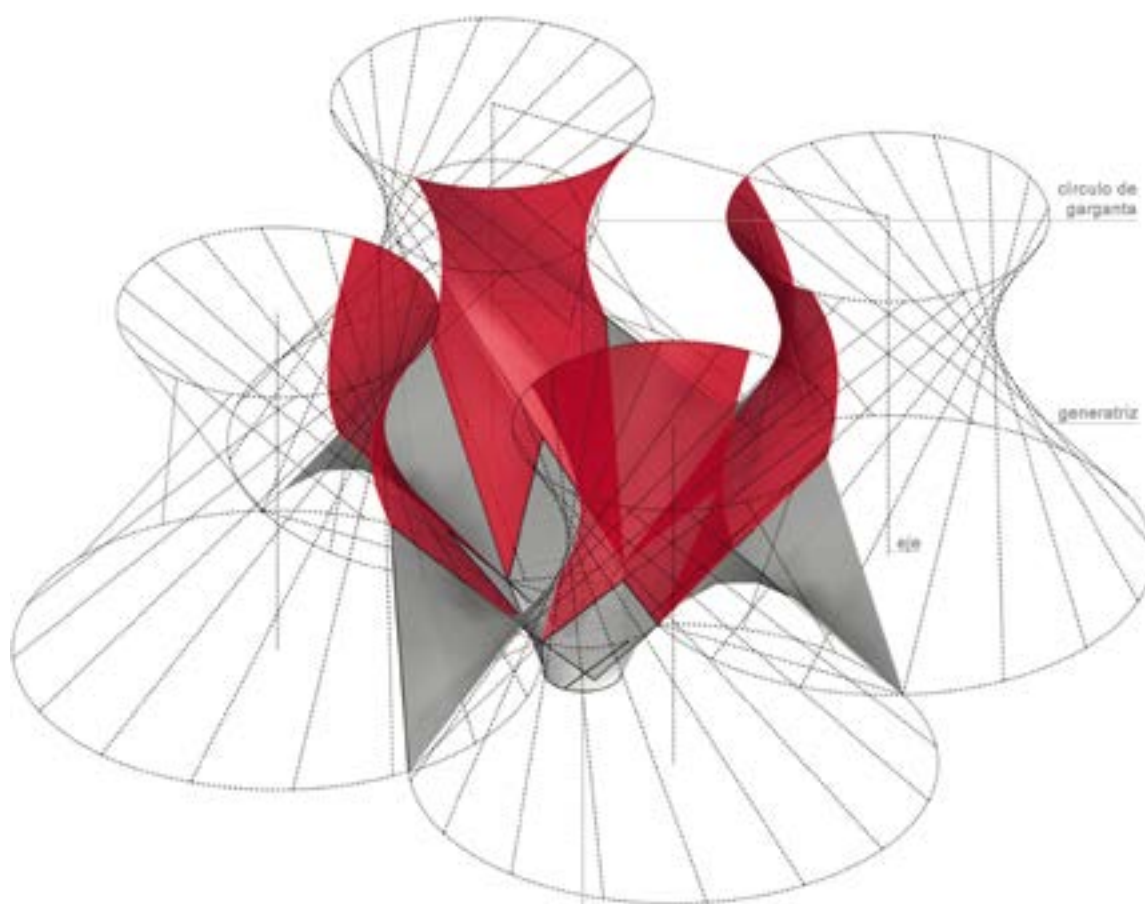


Figura 3.1. Esquema en perspectiva de los lucernarios de la Sagrada Familia, Gaudí. Dibujo de los autores.

Aunque ya las había experimentado en pequeñas piezas, es en el pórtico de la iglesia de la Colònia Güell donde introduce unas bóvedas convexas de cierto tamaño que encajan con la forma del paraboloides hiperbólico. Las rasillas cerámicas se cortan en piezas triangulares que tienen sus bordes alineados con las generatrices de la superficie reglada. Incluso se introducen unas aspas de cerámica vidriada, o *trencadís*, que parecen indicar el vértice y las direcciones de los planos directores de las superficies. En unos paños la cruz forma un ángulo de 120/60 grados y en otros se cortan a noventa grados. Recientes estudios demuestran que esta hipótesis no está suficientemente fundada (Cortés y Samper & Herrera, 2019) pero parece plausible que el autor tratara así de manifestar los elementos definidores del paraboloides. La composición constructiva de las bóvedas alterna piezas cerámicas, rasillas y capas de mortero (González, J. Casals, 2002).

Otra gran experimentación de Gaudí fue el trabajo con catenarias. El arco catenario es la forma natural que adopta una cadena cuando se cuelga de sus extremos. Si la carga que soporta es horizontalmente uniforme adopta la forma de una parábola, si

tiene unas cargas puntuales se denomina *arco funicular* (Gómez-Serrano, 2002). Las formas inversas a los hilos traccionados se convierten en los arcos comprimidos y Gaudí es famoso por construir modelos a escala, cabeza abajo, con hilos cargados con pesos que conformaban las formas de la estructura y con telas que definían el espacio interior. Después, encontradas las trayectorias exactas, daba la vuelta a esas curvas y las trasladaba a piedra y ladrillo.

Es importante señalar que, para las mismas luces, cuanto mayor es la altura del arco, menores son los empujes horizontales que produce, de aquí que la catenaria permita una reducción notable de estos sin más que elevar la clave del arco. El control de estas fuerzas excéntricas reduce o elimina la necesidad de contrafuertes. Gaudí adopta esta curva como imagen de su arquitectura y además traslada la idea del arco catenario a las bóvedas, formando superficies de revolución denominadas catenoides, que cuando se combinan o superponen en cascada generan complejas intersecciones. Estudios recientes proponen otras variaciones en el trazado de arcos del arquitecto catalán (Samper, González y Herrera, 2017), como la curva de Rankine.

Otra superficie destacada que forma parte de la experimentación del arquitecto catalán fue el hiperboloide hiperbólico. Aparece en las caballerizas de la Finca Güell. Las linternas de las bóvedas de la Sagrada Familia utilizan también esta geometría. Entre cada cuatro óculos se sitúa un pilar. La transición entre hiperboloides y la unión de estos con el capitel se resuelven con paraboloides hiperbólicos. Una solución muy ingeniosa, ya que aprovecha una generatriz común para realizar las transiciones. Gaudí hizo este proyecto, difícil de definir con geometría descriptiva, con el apoyo de maquetas de yeso (Buxadé, Margarit, 2002).

La arquitectura de Gaudí se sirve de las curvas y superficies para generar formas y espacios extraordinarios. No obstante, son los motivos de carácter más escultórico o estilístico los que resultan llamativos en sus obras. A menudo los estudios sobre el arquitecto catalán se centran en la exuberancia formal, pero un análisis geométrico abstracto desvela a su autor como un artista conocedor de la geometría y que explora sus posibilidades con la misma actitud inconformista con la que toma todas las herramientas a su alcance. Gaudí experimenta, propone y desarrolla formas y usos de gran originalidad, sin perder nunca el rigor, que da fundamento a la forma.

3.2. Pioneros de las láminas Hypar

Gaudí fue el primer arquitecto que utilizó el paraboloide hiperbólico a finales del siglo XIX, aunque lo hizo como superficies de transición entre estructuras y su expresión quedó un tanto diluida. Por ello se suele afirmar que las primeras láminas de hormigón que utilizan el paraboloide hiperbólico se realizan en los años treinta del siglo XX. El ingeniero francés Bernard Lafaille se suele citar como el primero en utilizar el Hypar en 1932, para un proyecto de hangar, aunque en realidad los dibujos de sus proyectos expresan claramente que las láminas son conoides y no paraboloides. Para Espion (2016), es el ingeniero francés Fernand Aimond el primero que desarrolla un método de cálculo y formaliza varios proyectos, entre 1933 y 1936, en los que verdaderamente se pueden reconocer estas superficies. Aunque para Joedicke, estudioso de las cáscaras finas, es el ingeniero italiano Giorgio Baroni el primero en construir verdaderamente cáscaras en forma de paraboloide a partir de 1938. Félix Candela, como veremos, se convertirá a partir de 1951 en uno de los autores más destacados en el uso estructural del paraboloide hiperbólico.

3.3. Eugène Freyssinet

Freyssinet (1879-1962) fue un ingeniero francés conocido por ser pionero en el uso del pretensado en las estructuras de hormigón. Una técnica que consiste en introducir en el hormigón tensiones de tracción previas a la puesta en carga, evitando su fisuración y aprovechando mejor la capacidad elástica del acero. Lanza en 1928 su patente fundamental en este campo, a la que seguirían numerosas invenciones en la industrialización de elementos de hormigón, como vigas, viguetas, losas, postes y tubos. Sus puentes más conocidos son Veurdre, Boutiron, Plougastel o Luzancy, entre muchos otros. También realiza construcciones industriales con cáscaras finas en forma de conoides (Espion, 2018) e incluso un barco de hormigón.

Es un ingeniero que asume el proyecto y la obra de manera personal, haciéndose responsable técnica y económicamente de todas las fases del proceso. No construyó proyectos ajenos ni diseñó para otros contratistas. Llevó todo a cabo con su propia empresa. Afrontó asombrosos retos técnicos, como en el puente de Plougastel, en el que construyó la cimbra flotante más grande conocida hasta entonces, para elaborar los tres arcos de casi 190 metros de longitud. Es autor de muchos otros avances, como el vibrado del hormigón, el endurecimiento rápido y el gato y el anclaje de pretensado, tan importantes en el reconocimiento de sus avances (Fernández Ordóñez, 1978) (Fernández Ordóñez, 2010).

3.3.1. Hangares de Orly

Una de sus obras más celebradas fueron los hangares para dirigibles de Orly, construidos entre 1921 y 1923 y destruidos por la aviación americana en 1944.

Los hangares están concebidos para alojar dirigibles Limousin. La bóveda se forma con cuarenta arcos de más de 80 m de luz y 7,5 m de ancho (sumando trescientos metros de largo). Freyssinet concibió esta obra como un objeto exclusivamente utilitario, condicionada por un ahorro de costes extraordinario, y él mismo admite que se sorprendió del enorme impacto que tuvo como verdadera obra de arte de la ingeniería moderna (Fernández Ordóñez, 1978) (Rui-Wamba, Fernández Alba, 2003).

La forma que Freyssinet elige es la de un arco parabólico (Figura 3.2), configurado por una lámina plegada en forma de «V» en hormigón. En una estructura como esta hay dos esfuerzos, el peso propio y el viento. El primero se resolvía con un trazado adecuado para los arcos, y el viento requería una

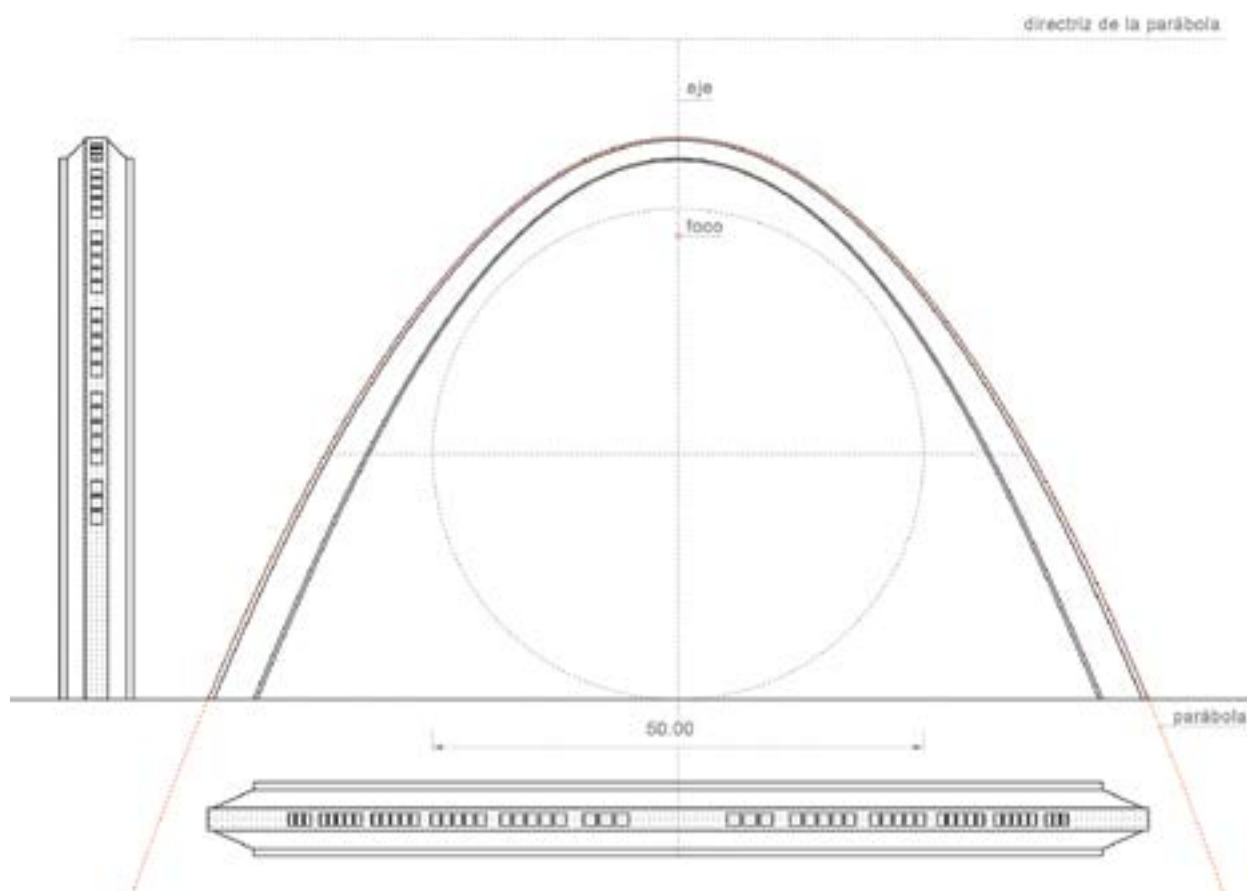


Figura 3.2. Hangares Orly, Eugène Freyssinet, 1921. Esquema de alzado que muestra el espacio circular de cincuenta metros de diámetro reservado a los dirigibles. Dibujo de los autores.

gran inercia que había que conseguir con un mínimo de materia, de aquí la forma ondulada de la sección. El proceso constructivo se hizo en cinco fases, dos arranques, dos voladizos y la bóveda propiamente dicha que se realizó con tres cimbras móviles, las dos laterales que se elevaban mediante gatos hidráulicos y la central, que se colgaba de las otras dos (Fernández Ordóñez, 1978).

La directriz se considera parabólica, aunque si se superpone una parábola sobre el alzado del proyecto, se puede comprobar que el perfil se aproxima mejor mediante una curva catenaria. No obstante, para nuestro análisis geométrico hemos decidido usar la curva cónica, por su importancia como concepto inicial. El ancho de la onda es variable, va desde un espesor de 5,4 metros en la base hasta los 3 metros en la clave. Cada arco se entiende pues como una superficie de barrido por carril, en la que la parábola sirve como trayectoria y los tres perfiles de la onda de hormigón, dos horizontales y simétricos en los arranques y uno vertical en la clave (o arranque y clave, si se considera solo una mitad simétrica) sirven como secciones transversales. Los huecos que permiten la entrada de luz se pueden realizar proyectando, desde

el centro de la circunferencia, una división en partes de la onda parabólica (Figura 3.3 y Figura 3.4).

A la hora de representar matemáticamente los hangares, podemos centrarnos en distintos elementos. Comenzamos por dibujar una circunferencia que aparece en los planos de los hangares, que realizaremos mediante la herramienta Geogebra. Para ello, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Encontrar el centro de la circunferencia.
2. Encontrar el radio de la circunferencia.

Para encontrar el centro de la circunferencia consideramos dos rectas distintas r_1 , r_2 que cortan en puntos A_1 , A_2 , y A_3 , A_4 para posteriormente trazar la mediatriz de cada una de las parejas de puntos anteriores. El punto de intersección de dichas rectas corresponde al centro de la circunferencia.

A continuación, determinamos el radio a través de la distancia del segmento desde A_1 hasta o mediante la herramienta distancia entre dos puntos. Por último, se traza una circunferencia, conocido el centro y su radio. A la hora de indicar a Geogebra el radio, se deberá expresar este de esta forma Dis-

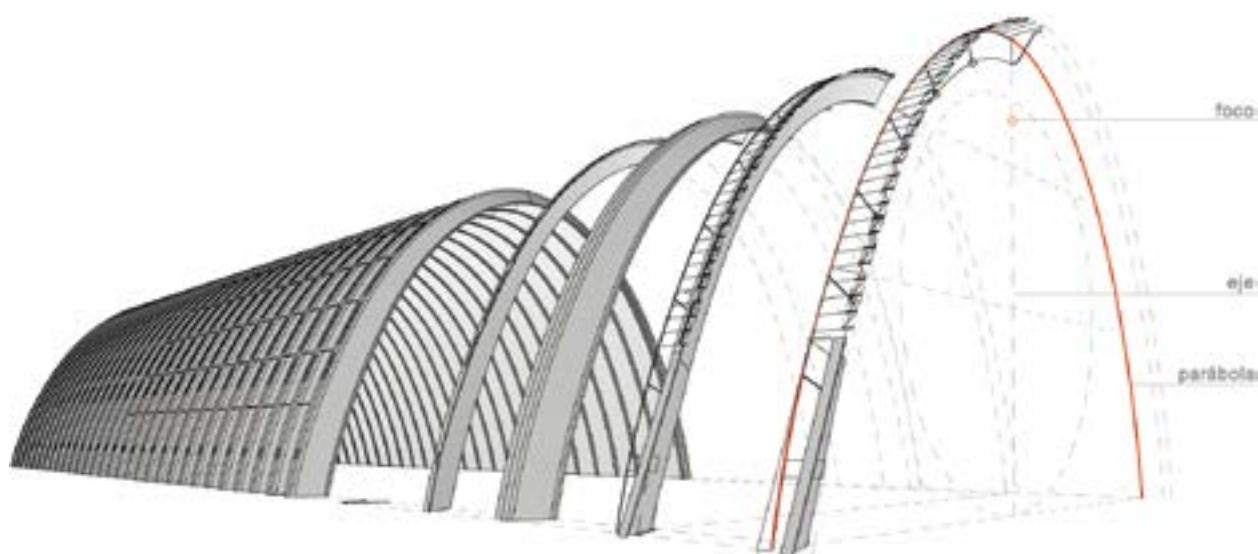


Figura 3.3. Hangares Orly, Eugène Freyssinet, 1921. Perspectiva del proceso de construcción gráfico. Dibujo de los autores.

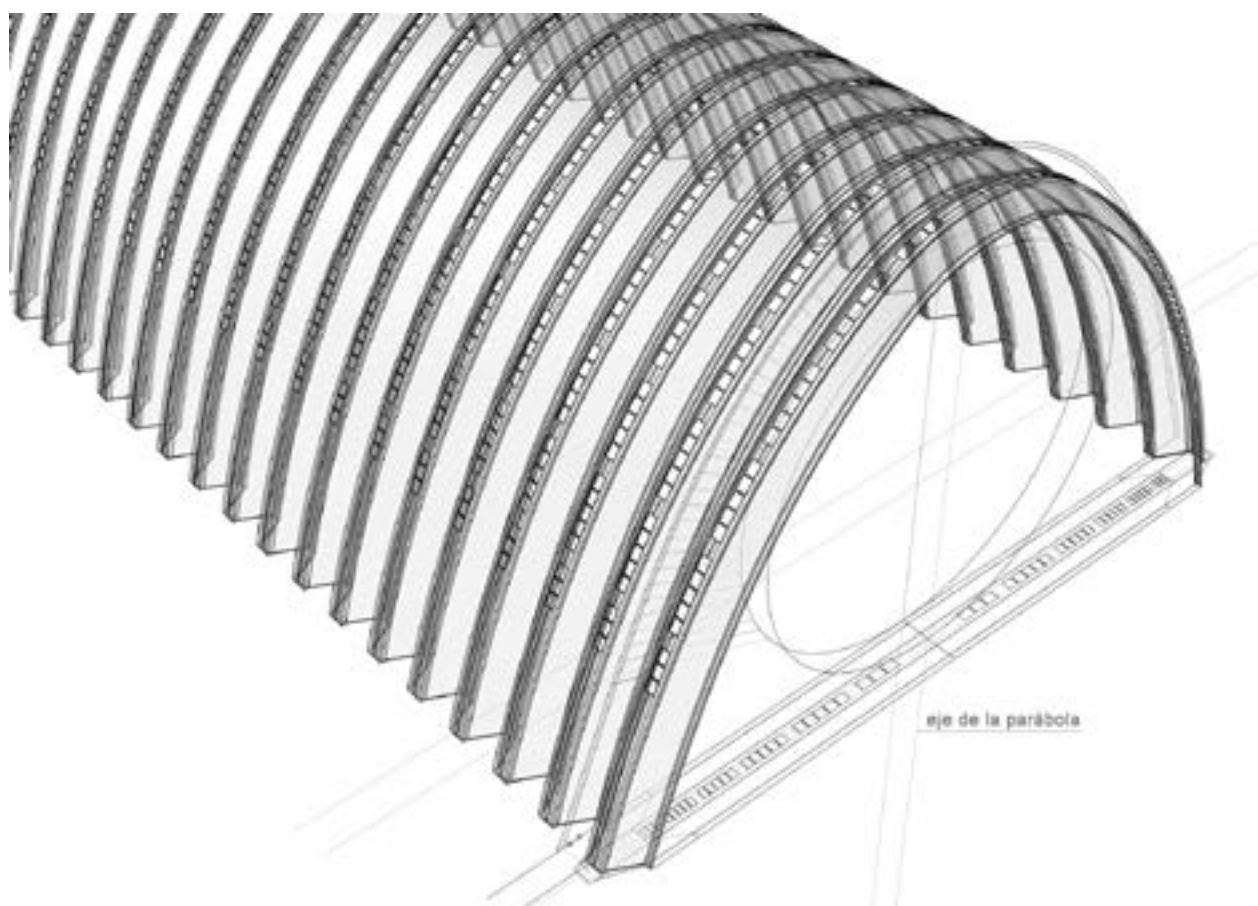


Figura 3.4. Hangares Orly, Eugène Freyssinet, 1921. La bóveda es una repetición de ondas construidas como barrido por carril, tomando la parábola como carril y las formas de V como secciones transversales. Dibujo de los autores.

tancia [O, A₁] en la línea de escritura que aparece para solicitar el radio de la circunferencia a dibujar.

A continuación, nos disponemos a abordar el dibujo del hangar mediante distintas curvas.

Para dibujar una cónica que mejor ajuste el dibujo del hangar se hace uso de la herramienta Dibujo de una cónica por cinco puntos. Es conocido que dados cinco puntos en posición general, existe una

única cónica que pasa por dichos puntos. Procedemos a elegir cinco puntos del trazado de la curva determinada por el hangar, y Geogebra muestra la cónica que pasa por dichos puntos. En la situación

que concierne a la obra bajo estudio se alcanza la siguiente ecuación, cuando el punto más alto del trazado del hangar se sitúa en el centro de coordenadas (Figura 3.5).

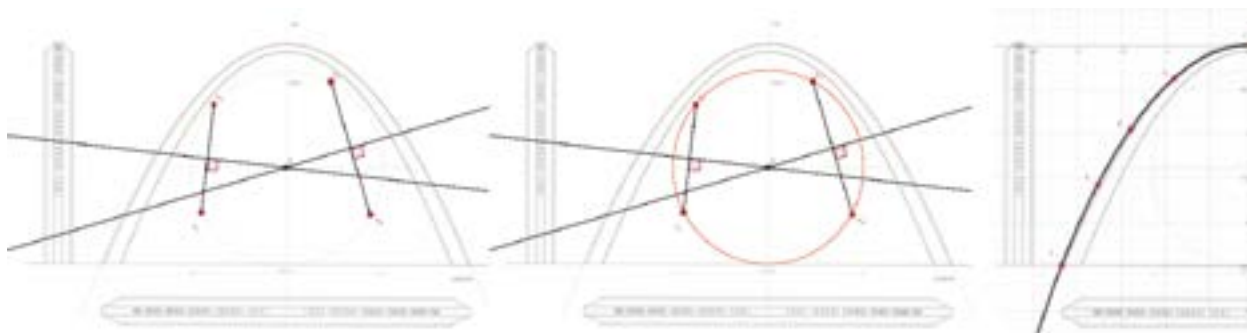


Figura 3.5. Izquierda y centro: dibujo de elementos de en los Hangares de Orly. Derecha: aproximación mediante una cónica. Dibujo de los autores.

La cónica que se obtiene es una parábola. Realizamos una segunda aproximación mediante una curva cicloide. Este tipo de curvas viene determinado por los puntos de la forma

$$[a[t - \sin(t)], a[1 - \cos(t)]]$$

donde t es un valor real. Establecemos un deslizador, llamado a y procedemos a describir esta curva mediante su parametrización en Geogebra. Variando los valores de a y el rango de valores de a podremos construir una cicloide.

Para ajustar dicha cicloide al dibujo, podemos crear un vector que mueva la construcción hasta que se ajuste todo lo posible con el dibujo (Figura 3.6). En este caso la aproximación por este tipo de curvas no es buena.

Otros interesantes modelos que el ingeniero francés desarrolló fueron las cáscaras de cañón

cortas y los conoides de luz norte (Espion, 2018). Estos últimos fueron utilizados frecuentemente como cubiertas de para talleres y almacenes. Un conoide es una superficie reglada que une dos directrices mediante rectas paralelas a un plano director. En este caso, las directrices son dos arcos rebajados de circunferencia, y sus generatrices convergen hacia una recta horizontal que coincide con la imposta de las bóvedas. Se trata de cáscaras finas de hormigón de proporción aproximada 2 a 1, que se apoyan por el lado corto, en vigas horizontales y que por su lado largo dejan entrar la luz de norte entre los bordes curvos. Muy alabadas por su transparencia en la vista hacia el norte y la calidad de la iluminación natural, sin embargo, estas estructuras han sido criticadas por la presencia de los tirantes, que aseguran u comportamiento similar a los de los arcos, más que como láminas superficiales (Billington, 1983).

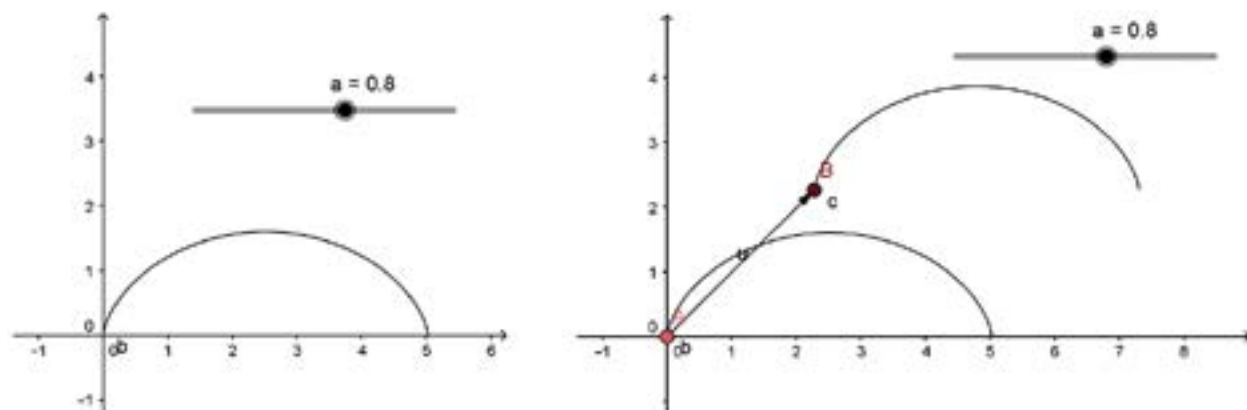


Figura 3.6. Izquierda: cicloide. Derecha: traslación de cicloide. Dibujo de los autores.

3.4. Robert Maillart

Robert Maillart (1872-1940) fue un ingeniero suizo conocido principalmente por sus refinados puentes, entre los que se pueden destacar el de Salginatobel, construido en 1930, o el de Schwandbach, de 1933. Especialmente sorprendentes son los puentes horizontalmente curvos, en principio desfavorables en su comportamiento estructural a torsión, pero defendidas por su autor porque permiten mayor flexibilidad en la elección de parámetros geométricos y de rigidez (Laffranchi, Marti, 1997).

Los puentes de Maillart son considerados arte estructural. Algunos teóricos, incluso apuntan que las preocupaciones de este ingeniero por la estética eran tan importantes como las puramente técnicas (Billington, 1974). Salginatobel es considerado por Billington la cumbre del trabajo de Maillart. Con noventa metros de luz, este puente combina un arco tri-articulado con una finísima unión en el centro del vano y un tablero apoyado sobre columnas aplanalladas. Una de las aportaciones de Maillart al diseño de puentes deriva de la adaptación de la forma de calcular las estructuras de piedra, por medio de estática gráfica, que es a su vez la inversión de los puentes suspendidos, haciendo del método de cálculo la definición de la forma (Zastavni, 2011).

3.4.1. Hall del Cemento

En este caso interesa analizar el *Cementhalle*. Una obra peculiar, realizada para la exposición nacional suiza de 1939. Más que una construcción funcional fue un símbolo, una obra de arte que debía servir como medio de difusión. Su misión era demostrar las cualidades del cemento Portland, y según parece, su forma se inspiraba en los hangares de Orly de Eugène Freyssinet (Maillart, Bill, 1955). Se levantó como un pabellón temporal, y una vez terminada la feria, la estructura se sobrecargó hasta su rotura con el fin de conocer mejor su comportamiento resistente.

La lámina, de seis centímetros de espesor, se construyó disponiendo las armaduras de acero sobre el encofrado y proyectando cemento. La cubierta y los forjados forman una unidad, y la carga vertical se conduce a cuatro pilares centrales unidos rígidamente a las láminas por sendos arcos en forma de nervadura que recorren todo el conjunto (Billington, 1983). Los bordes de la estructura quedan vistos, y son tan finos que la cubierta se convierte casi en una superficie de espesor nulo.

Si tratamos de dibujar una parábola sobre los alzados comprobamos que no se ajusta exactamente al perfil de la lámina de hormigón (Figura 3.7). Esto se debe a que la forma que mejor se adapta a la trayectoria de las cargas en una bóveda como esta es la catenaria. En este caso empezamos el modelo 3D trazando una curva por puntos interpolados como aproximación a la sección. Aunque, a menudo se habla de lámina parabólica y parece que es esta cónica la inspiradora del proyecto, por ello utilizaremos ambas curvas, resaltando sus diferencias. El mismo perfil da lugar a un cilindro recto y a una superficie abocinada. Esta última es una reglada de transición entre dos curvas, no es un cono ni un capialzado (Figura 3.8).

El objeto matemático asociado a esta obra está dirigido a describir una técnica de obtención de superficies regladas mediante dos curvas límite de dicha superficie. Para ilustrar esta técnica, vamos a considerar la superficie abocinada del Hall del Cemento, de Robert Maillart.

Sean dos funciones de una variable definidas en el intervalo $I = [a, b]$, siendo $a < b$. Pongamos que la primera función viene dada por $f: I \rightarrow R^3$ y la segunda es $g: I \rightarrow R^3$.

El proceso comienza por el trazado de la función en el espacio tridimensional de forma que se encuentre contenida dentro de un plano, por ejemplo, el plano $z = 0$. Consideremos una profundidad fija, a la que llamamos $M > 0$. A esta profundidad dibujaremos, en el plano $z = M$, nuestra segunda función.

En términos de coordenadas, las operaciones que acabamos de realizar se resumen en que consideramos, en realidad, parametrizaciones de dos curvas alabeadas, cuyas parametrizaciones vienen definidas por $\alpha: I \rightarrow R^3$, siendo $\alpha(t) = [t, f(t), 0]$, $t \in I$ para la primera función, y $\beta: I \rightarrow R^3$ con $\beta(t) = [t, g(t), M]$, $t \in I$, para la segunda de las funciones. Cabe observar que parametriza una curva contenida en el plano $z = 0$, ya que su tercera componente es siempre nula. Dentro de este plano, la función f se representa en las variables restantes. Para la segunda de las parametrizaciones, el plano considerado es el plano $z = M$. Como ejemplo aclaratorio de la construcción, se toman las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$, siendo $x \in [0,1]$. Mediante la herramienta Geogebra se dibujan sus correspondientes grafos.

Después, se asigna $M = 2$ y se dibuja la imagen de las parametrizaciones α y β .

El último paso consiste en unir puntos correspondientes mediante un segmento, en el sentido de

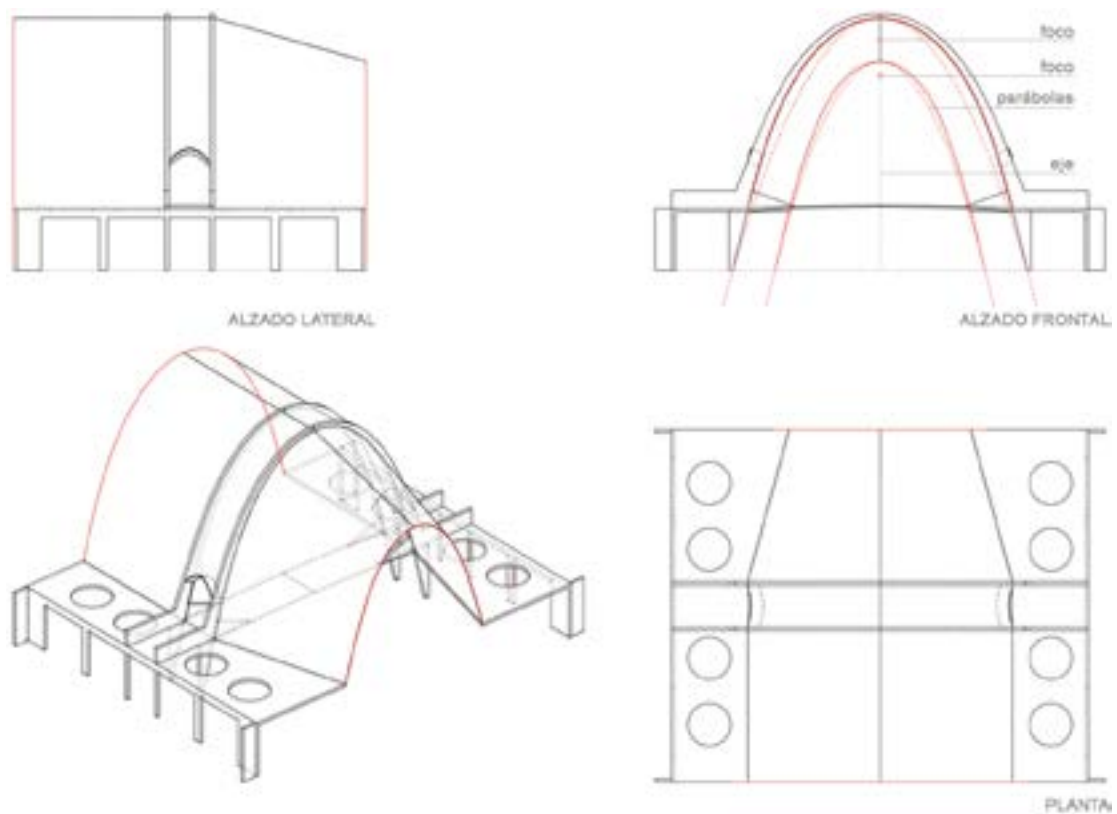


Figura 3.7. Cementhalle, Robert Maillart, 1939. Esquema de planta, alzados y perspectiva. Se han destacado en rojo a puntos unas parábolas para subrayar que una estructura como esta responde mejor a la curva catenaria. Dibujo de los autores.

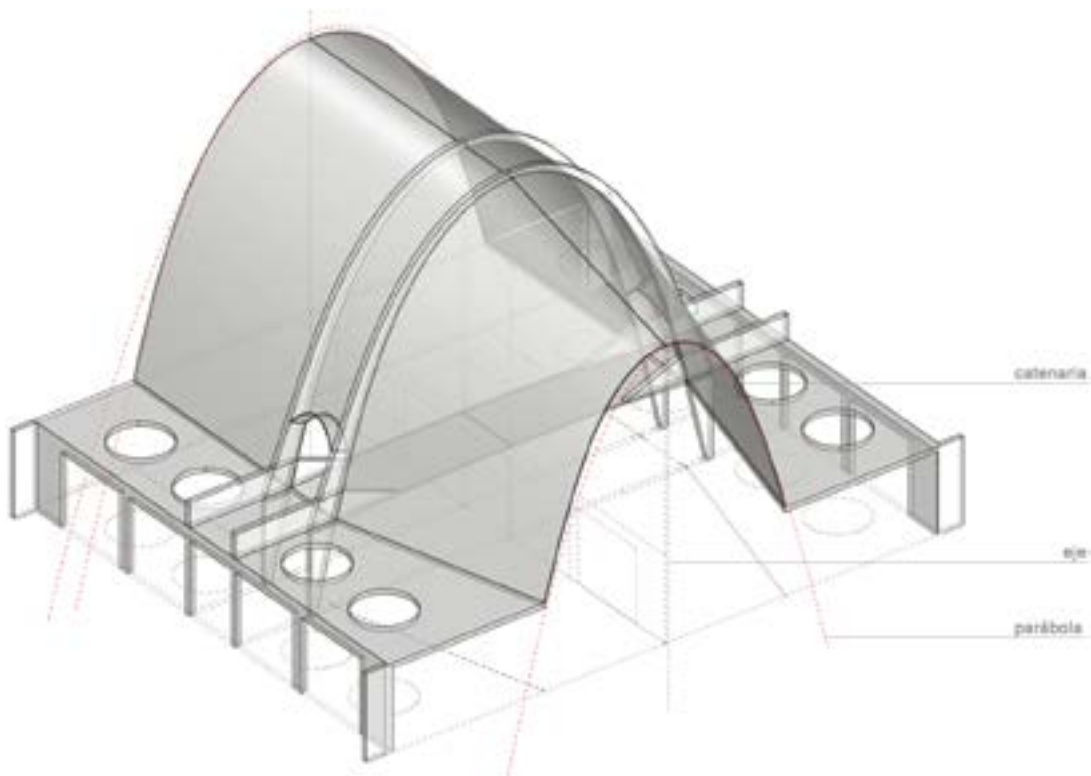


Figura 3.8. Cementhalle, Robert Maillart, 1939. Perspectiva del modelo 3D. Se superponen las parábolas mostrando que el diseño de las cáscaras se basa en catenarias, un poco más anchas en la cúspide, como corresponde a una carga uniforme a lo largo de la curva. Dibujo de los autores.

que se alcanzan con un mismo valor del parámetro t tanto en α como en β , por medio de una parametrización de la superficie buscada. Así, si $X(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ es la parametrización de la superficie reglada buscada, se procede a hacer variar el parámetro v según la profundidad, es decir, v toma valores desde la profundidad inicial en la que $z = 0$ hasta una profundidad final en que $z = M$. Tenemos entonces que v simplemente recorre las distintas profundidades para la variable z , y por tanto, $z(u, v) = v$. De esta forma, el rango de los valores de este parámetro varía en $v \in [0, M]$. El primero de los parámetros, u , será utilizado para recorrer las curvas en el eje x , de modo que $x(u, z) = u$. En este punto, se determina la parametrización de la superficie buscada en dos de sus coordenadas de la siguiente forma:

$$X(u, v) = [u, y(u, v), v],$$

siendo $u \in [-1, 1]$ y $v \in [0, M]$. Queda establecer la manera en la que el valor de $y(u, v)$ se ve modificado en función de los parámetros de forma que:

1. la curva definida por f sea recuperada cuando $v = 0$,
2. la curva definida por g sea alcanzada para el valor del parámetro $v = M$,

3. el cambio de una a otra curva se haga de forma que obtengamos una superficie reglada?

Para definir un segmento entre dos puntos se busca una combinación convexa entre las coordenadas de dichos puntos. En el caso que nos concierne, se buscará recuperar tanto f como g .

Obsérvese que si se pone

$$y(u, v) = \Delta_1(u, v)f(u) + \Delta_2(u, v)g(u),$$

se recuperará f siempre que $\Delta_1(u, v)$ sea una función lineal en v que para $v = 0$ valga 1, y para $v = M$, ésta se anule. Pondremos $\Delta_1(u, v) = (M - v)/M$. De la misma forma, se busca una función lineal en v , $\Delta_2(u, v)$ de modo que para $v = 0$ valga 0, y para $v = M$, valga 1, recuperando así la función g . La función buscada es $\Delta_2(u, v) = v/M$.

La parametrización

$$X(u, v) = \left(u, \frac{M - v}{M} f(u) + \frac{v}{M} g(u), v \right),$$

con $u \in [a, b]$ y $v \in [0, M]$ soluciona el problema. A continuación se pondrá de manifiesto la anterior construcción en el ejemplo propuesto. En este caso se tiene que la superficie interpoladora queda representada según la Figura 3.9.

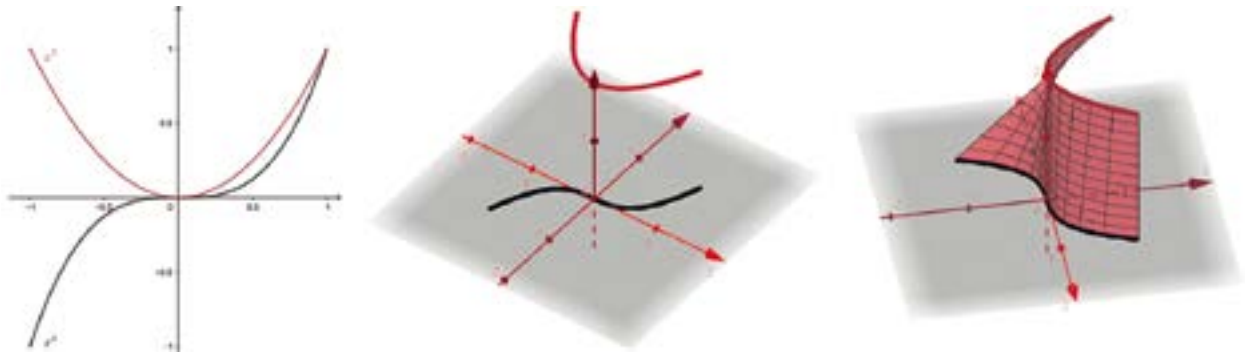


Figura 3.9. Izquierda: curvas interpoladas. Centro: curvas interpoladas ($M = 2$). Derecha: superficie interpoladora. Dibujo de los autores.

No entramos en detalles. Sin embargo, puede resultar interesante que el lector pruebe a realizar una construcción similar cuando las funciones no están definidas en un mismo intervalo. En este caso, es necesario realizar un escalado adecuado en las parametrizaciones de las curvas que generan la superficie reglada. Supongamos que $I = [a, b]$, siendo $a < b$ y $J = [c, d]$, siendo $c < d$. Pongamos que la primera función viene dada por $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y la segunda es

$g: J \rightarrow \mathbb{R}^2$. Realizando unas operaciones de escalado adecuadas en la segunda función, de forma que al valor $f(u)$ le corresponda su aquel en abscisa proporcional respecto a g , es decir, $g\left(\frac{(d - c)(u - a)}{b - a} + c\right)$, y parametrizando el segmento que une los puntos $[u, f(u), 0]$ y $\left[u, g\left(\frac{(d - c)(u - a)}{b - a} + c\right), M\right]$, es decir,

$$y = f(u) + v \left[g \left(\frac{(d-c)(u-a)}{b-a} + c \right) - f(u) \right]$$

$$z = vM$$

para $v \in [0,1]$, se concluye que la parametrización para la superficie reglada viene determinada por

$$X(u, v) = \left[u, f(u) + \frac{v}{M} \left[g \left(\frac{(d-c)(u-a)}{b-a} + c \right) - f(u) \right], v \right], \quad (1)$$

donde $u \in [a, b]$ y $v \in [0, M]$.

También puede ser interesante partir de curvas que no vienen definidas por funciones, sino que son arcos de curva determinados mediante una parametrización, o bien de forma implícita como los puntos que verifican una cierta ecuación. En este caso, se debería tener cierto cuidado a la hora de elegir curvas adecuadas.

Aplicación matemática a la obra de Maillart. Consideremos el Hall del Cemento, de Maillart. En

esta obra se pueden observar dos estructuras diferenciadas. Por un lado, se tiene una estructura cilíndrica con base parabólica, por otro, una superficie que responde a las técnicas utilizadas. Como se puede observar en las figuras que se adjuntan sobre esta obra, una parte de esta es una superficie reglada limitada por dos parábolas distintas. Nos fijaremos exclusivamente en esta porción.

Puesto que nuestro objetivo en esta parte es aplicar la anterior técnica a esta obra, no tendremos en cuenta las dimensiones reales de la obra, sino que utilizaremos un valor de escala, a partir de las figuras con las que contamos. En primer lugar, determinaremos las funciones que dan lugar a los bordes en la superficie. Para ello, utilizaremos la herramienta Geogebra.

Primero, tomamos una de las figuras adecuadas para obtener la ecuación de las parábolas que conforman las curvas límite de la superficie reglada, y la situamos como fondo en nuestra pantalla de Geogebra. La situamos de forma que una de las parábolas tenga su vértice en el origen de coordenadas, como se muestra en la Figura 3.10.

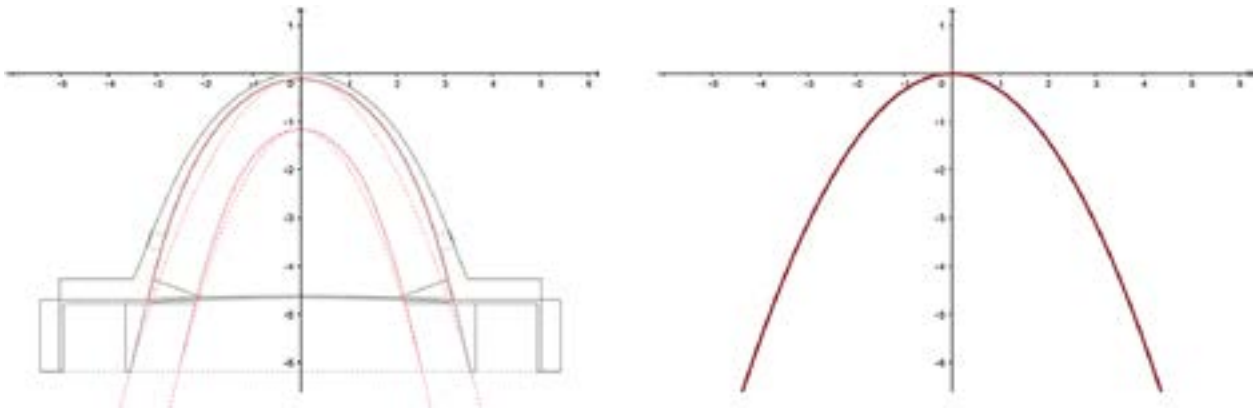


Figura 3.10. Izquierda: vista gráfica de Geogebra. Imagen del Hall del Cemento. Derecha: ajuste de la curva. Dibujo sobre sección transversal (Maillart, Bill, 1955, 177). Dibujo de los autores.

A continuación, construimos una parábola que se ajuste a una de las curvas que definen la superficie, obteniendo una ecuación implícita.

Para la primera parábola, su ecuación implícita viene dada por $5,96x^2 + 15,24y = 0$, de donde $y = \frac{-5,29x^2}{15,24}$. Consideramos la parametrización desde los puntos en los que se sitúa su soporte. Dos puntos nos indican que será en $[-3,93, 3,93]$ apro-

ximadamente. Para estimar la ecuación de la segunda parábola, se realiza la misma operación, concluyendo que tiene ecuación $5,29x^2 + 8,04y = -10,29$,

de donde $y = \frac{-10,29 - 5,29x^2}{8,04}$, siendo su intervalo

de definición $[-2,46, 2,46]$. Tomando estos datos y llevándolos a la fórmula en (1) se concluye la siguiente parametrización para la superficie:

$$X(u, v) = \left[u, f(u) + \frac{v}{M} \left[g \left(\frac{(2,46 + 2,46)(u + 3,93)}{3,93 + 3,93} - 2,46 \right) - f(u) \right], v \right],$$

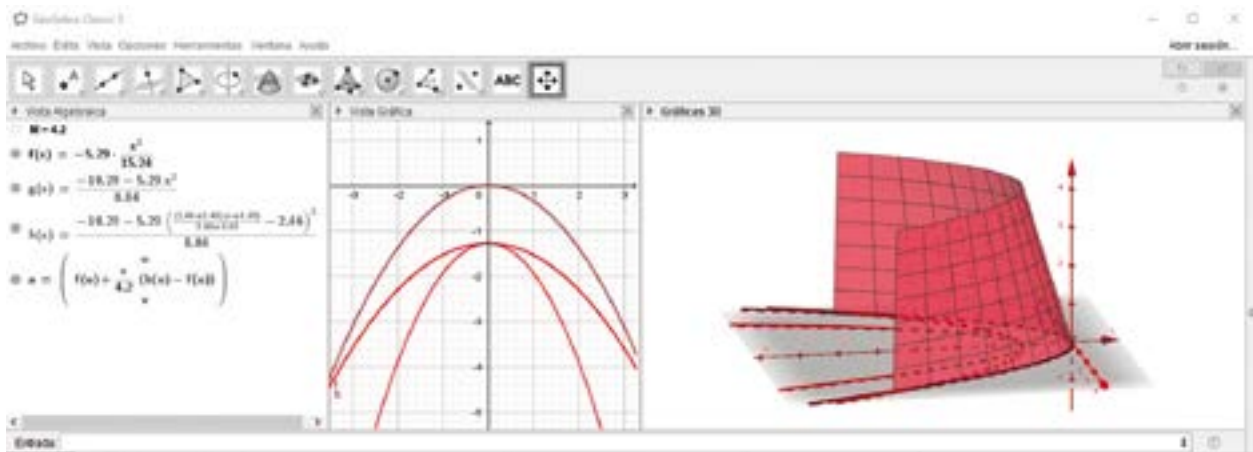


Figura 3.11. Realización de la superficie con Geogebra. Dibujo de los autores.

$u \in [a, b]$ y $v \in [0, M]$, siendo la profundidad $M = 4,16$, que puede obtenerse mediante medidas sobre los planos (Figura 3.11).

3.5. Eduardo Torroja

Eduardo Torroja Miret (1899-1961) fue ingeniero de caminos y miembro de una destacada saga de científicos. Su padre, Eduardo Torroja Caballé, fue un importante matemático que ejerció como profesor en la Universidad Central desde 1869, en 1876 obtuvo la plaza de Catedrático de Geometría Descriptiva de la Facultad de Ciencias, en 1891 fue elegido académico de Ciencias y en 1893 ingresó en la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Sus hermanos mayores también fueron académicos (Antuña Bernardo, 2003). Nos interesa subrayar la trayectoria profesional del padre y los hermanos, pues el dominio de la geometría de Eduardo Torroja Miret bien puede decirse que tuvo su fundamento en el entorno familiar.

Eduardo Torroja utiliza la combinación de diversas superficies en sus diseños, especialmente las cuádricas, tales como la esfera en la cubierta del Mercado de Algeciras, los cilindros, como en la cubierta del Frontón de Recoletos o el Hiperboloide Hiperbólico, que utiliza en la cubierta de la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela y en el depósito de Fedala. También podemos encontrar superficies de revolución, como en algunas bóvedas de las gradas del Hipódromo, que alberga varias bóvedas tóricas. Este tipo de superficies, como la lámina cilíndrica, esférica o de revolución se pueden montar sobre cimbras con una curvatura constante, más fáciles de controlar y reutilizar que las variables, lo que hace que los medios auxiliares sean más sistemáticos y, por tanto, menos costosos.

El paraboloide hiperbólico, sin embargo, apenas aparece en sus proyectos. Encontramos un dibujo de una cubierta para la empresa Casa, con cáscaras que podrían ser paraboloides, pero no se llega a desarrollar este diseño. Siendo Torroja un pionero en el diseño de estructuras laminares sorprende que no utilizara esta superficie.

3.5.1. El Mercado de Algeciras

Es un proyecto realizado junto al arquitecto Manuel Sánchez Arcas en 1933. Las cubiertas de cáscaras esféricas, de láminas delgadas de hormigón se habían realizado en Francia y Alemania durante los años veinte, una de las principales referencias es la que realizó Franz Dischinger, en Jena, de 40 m de diámetro. Torroja proyecta para el mercado una cúpula de 47 metros de luz, con una cáscara de 10 cm de espesor (esbeltez aproximada de 470). Los apoyos son pilares situados en los vértices de un octógono y entre soporte y soporte se trazan unos lunetos cilíndricos de eje horizontal y directriz circular, que rigidizan la lámina de la cúpula y salvan la luz entre apoyos. La rigidez de los lunetos se refuerza con la inserción de tirantes en abanico desde el eje a la directriz del cilindro.

Los cálculos son muy complejos, y el ingeniero decide por primera vez que es necesario ponerlos a prueba en un ensayo de modelo reducido (Chías Navarro, Abad Balboa, 2005). También se realizan comprobaciones gráficas, mediante polígonos funiculares. Al nivel de las cabezas de los soportes se dispuso un tirante perimetral tensado que impedía el desplazamiento horizontal y mantenía la cúpula comprimida (Antuña Bernardo, 2003). En el diseño inicial Torroja tenía previsto un refuerzo en forma

de nervio anular conectando las claves de los arcos perimetrales, pero al final lo eliminó, optando por un diseño más depurado, que resalta la continuidad de la esfera.

La cubierta es un casquete esférico cuyo centro está muy por debajo del plano de apoyo, en el subsuelo (Figura 3.12). Sobre los lados del octógono se

apoyan generatrices de cuatro cilindros de eje horizontal y directrices circulares, cuyos centros, están también fuera del alcance del constructor y no se pueden utilizar en el replanteo. La definición de la cimbra, por tanto, se tuvo que hacer por puntos, fabricando arcos de madera siguiendo los meridianos y paralelos de la esfera.

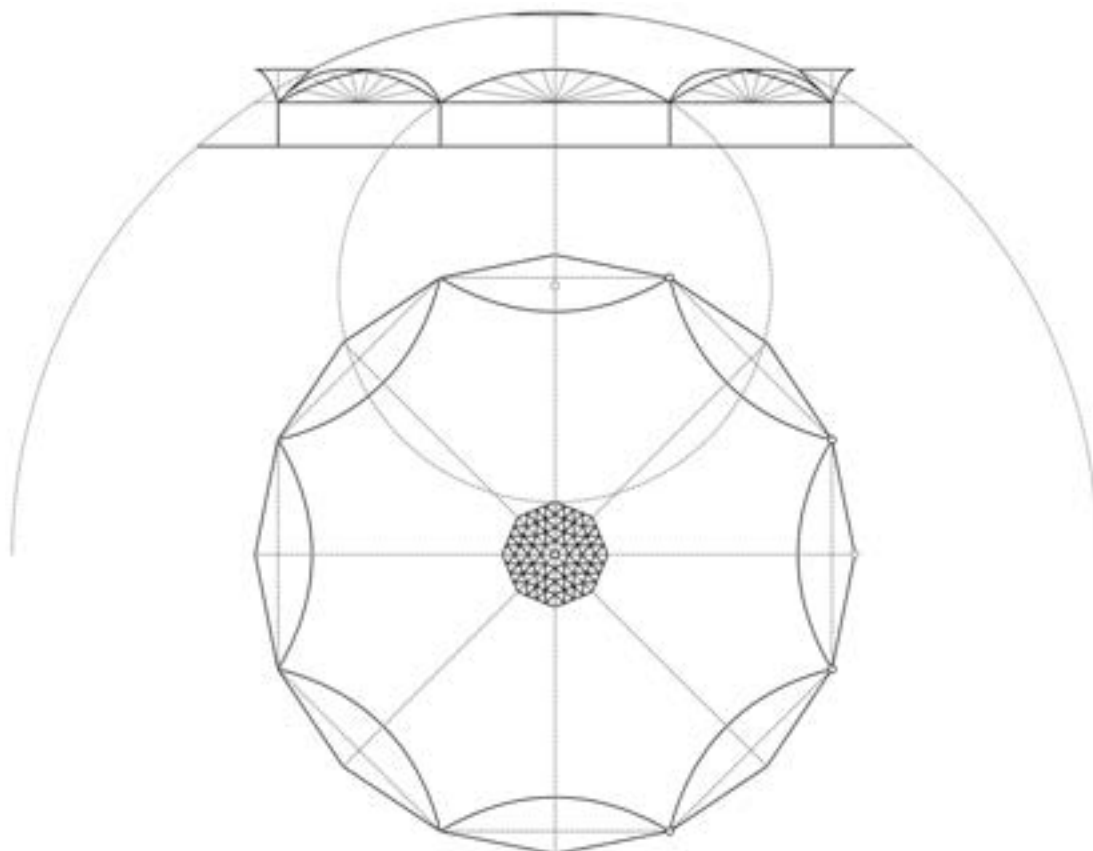


Figura 3.12. Esquema planta y alzado del Mercado de Algeciras, Eduardo Torroja, 1935. Dibujo de los autores.

Sabemos que el radio de la esfera es de 44 metros, por las secciones del proyecto, que el plano horizontal del octógono está 7,2 metros por debajo del punto más alto de la esfera. Los cilindros tienen un radio aproximado de 17,25 metros (Figura 3.13). Los bordes exteriores de los lunetos cilíndricos se ven cortados en la proyección horizontal por un polígono de dieciséis lados (hexadecágono). Estos cortes oblicuos al eje de cada cilindro dan a la cubierta un perímetro formado por bordes elípticos acabado en punta. Finalmente se abre en el cenit una claraboya octogonal inscrita en una circunferencia de 8,4 metros de diámetro. Es interesante recordar que el Panteón de Agripa, en Roma (ca. 124 d. C.) tiene inscrita una esfera de 43,5 metros de diámetro y un óculo de casi 9 metros de diámetro.

3.5.2. El graderío del Hipódromo de la Zarzuela

En 1934 el equipo formado por los arquitectos Carlos Arniches y Martín Domínguez, junto con Eduardo Torroja como ingeniero, ganaron el concurso para dotar de nuevas instalaciones al Hipódromo de la Zarzuela en Madrid. Las tribunas es una obra declarada Bien de Interés Cultural en 1980 y recientemente ha sido restaurada (2008). La configuración de la estructura y cubierta, diseñadas por Torroja, es el objeto fundamental de este capítulo por su magistral uso de la geometría.

El graderío del Hipódromo presenta una cubierta de hormigón armado con 12,60 metros de vuelo. En el diseño de esta interviene la *forma* de manera decisiva. El ingeniero utiliza sectores de

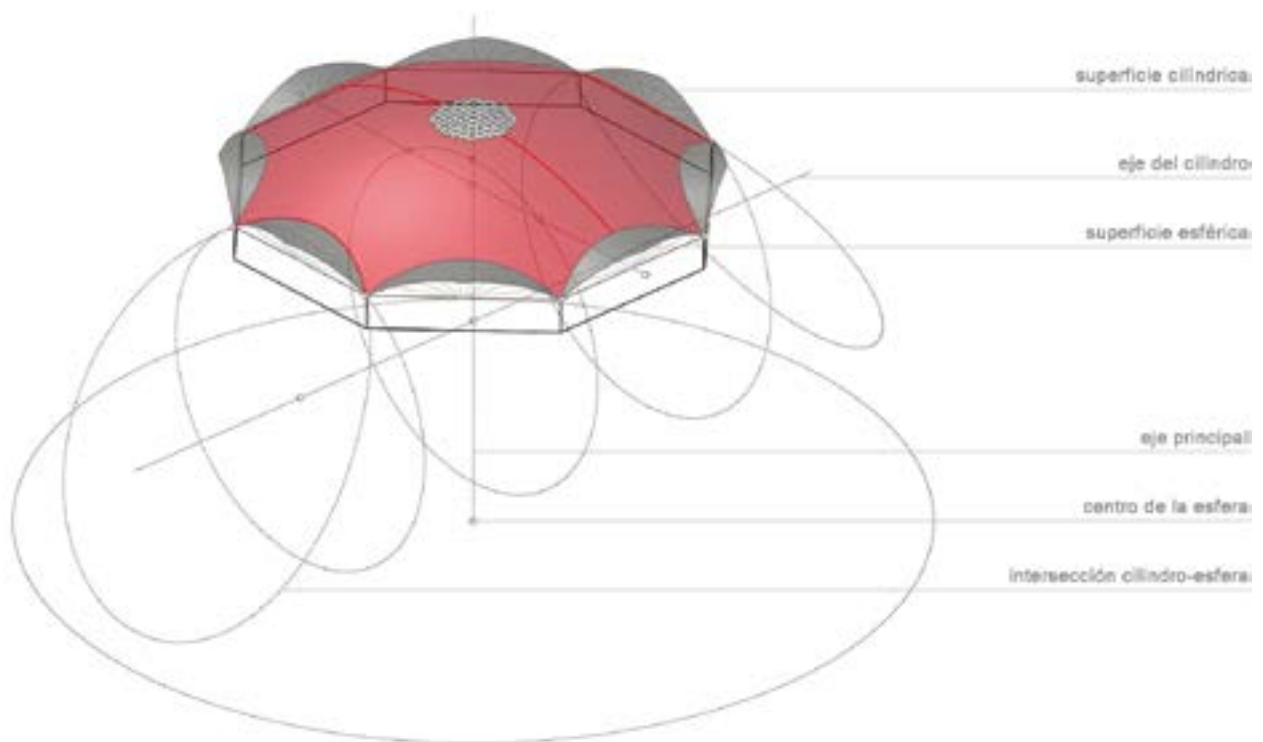


Figura 3.13. Esquema en perspectiva del Mercado de Algeciras, Eduardo Torroja, 1935. Este esquema muestra la relación entre el centro de la esfera y el de los cilindros. Dibujo de los autores.

hiperboloide hiperbólico, colocados son su eje horizontal. El resultado otorga continuidad en los bordes, aportando una especial ligereza visual al conjunto, en palabras de Torroja, debido a «la gracia que le confiere la pureza de líneas y su simplicidad estructural» (Chías Navarro, Abad Balboa, 2005). Los aspectos funcionales, estructurales y estéticos forman así una unidad, tanto en apariencia como en esencia.

Aunque la cubierta sobresale por su audacia, su relación con el resto de la estructura del graderío no es menos interesante. El conjunto es un alarde estructural y formal perfectamente equilibrado a base de láminas curvas que vamos a interpretar a continuación. Nos centraremos en comprender la superficie hiperbólica de la cubierta, además de una aproximación visual y formal al conjunto de la tribuna.

Como ocurre con muchas otras obras la configuración geométrica de partida se ve matizada por la evolución del proyecto y las servidumbres de la construcción. De este modo los sectores hiperbólicos utilizados en la cubierta del Hipódromo se ven deformados en los apoyos, perdiendo en parte su condición de reglada a cambio de obtener una forma más lineal en las ménsulas.

En efecto, si el hiperboloide hiperbólico es cortado por un plano paralelo a su eje, la curva inter-

sección es una hipérbola. Salvo que se corte la superficie por un plano tangente a la garganta del hiperboloide, en cuyo caso serían dos rectas, pero no es así en esta ocasión. La cuestión es, que aun siendo un corte interior a la garganta los bordes inferiores son rectos, potenciando el carácter de ménsula. De aquí deducimos que la superficie se ha deformado en los bordes para conseguir tal efecto, pues según explica el propio Torroja, los arquitectos consideraron que «el efecto era demasiado valiente para la visión estética actual» (Chías Navarro, Abad Balboa, 2005).

Dada la complejidad de la forma de la cubierta realizaremos una interpretación a partir de una doble aproximación. En primer lugar, construimos un modelo del hiperboloide, que se convertirá en la cara superior de la lámina. Por otro lado, trazamos el perfil poligonal de la cara inferior, forma obtenida directamente de la documentación gráfica del proyecto.

Para construir el hiperboloide hiperbólico se han de determinar sus elementos principales: eje, círculo de garganta y al menos una generatriz (Figura 3.13). A partir del alzado frontal obtenemos el centro y el radio del círculo de borde. Sobre el alzado lateral tomamos la tangente horizontal a la rama de hipérbola para definir el radio y posición del círculo de garganta.

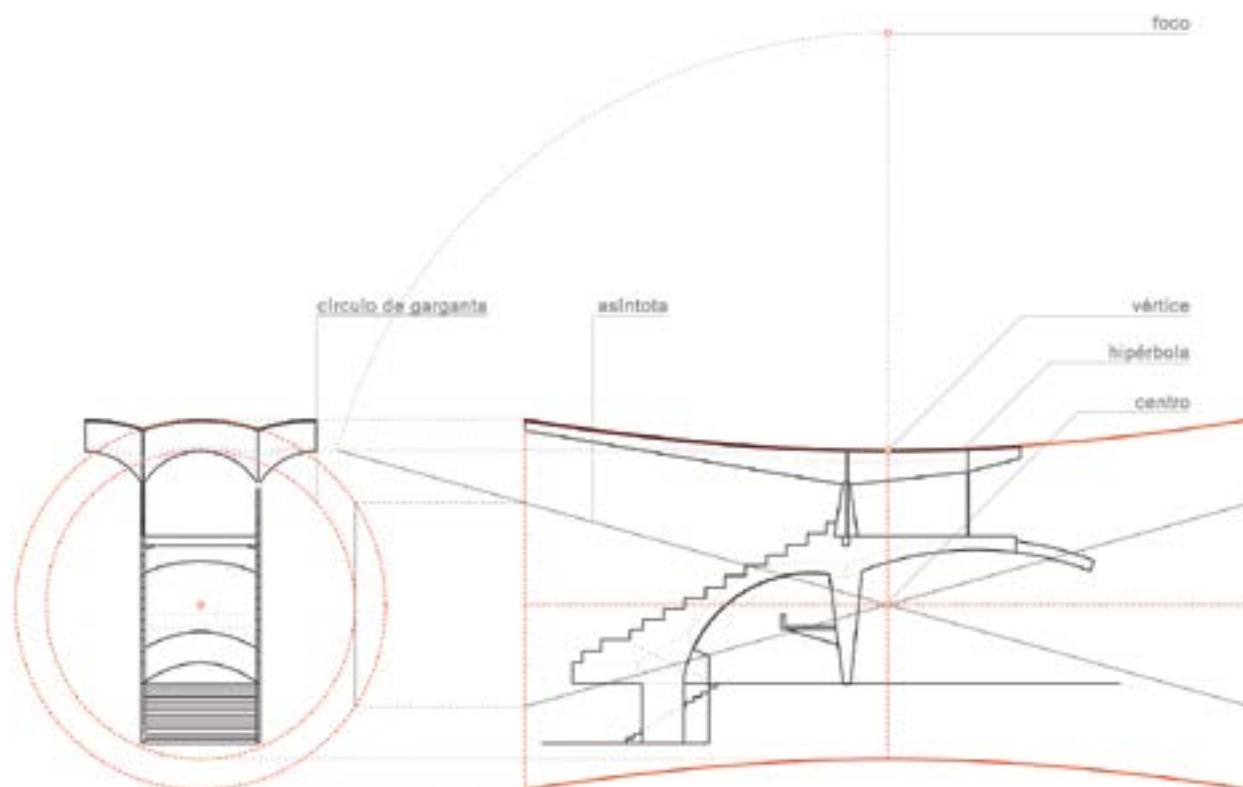


Figura 3.14. Alzado y sección de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1941. El hiperboloide hiperbólico tiene el eje horizontal. Se indican las posiciones del círculo de garganta, foco, vértice, centro y asíntotas de la hipérbola. Dibujo de los autores.

Para completar la definición del hiperboloide hallamos dos generatrices. Desde el alzado frontal es inmediato, mediante una tangente vertical a la garganta. De este modo tendremos dos rectas frontales en el alzado lateral. Estas serán también las asíntotas de la hipérbola de esa proyección. Ahora podemos dibujar la hipérbola.

Comprobamos que el hiperboloide hiperbólico es, en efecto, una superficie reglada a la vez que de revolución (Figura 3.15). En cada punto de esta se cortan dos rectas, una de cada familia, que quedan contenidas en el plano tangente a la superficie en ese punto.

En el trazado de la cara inferior de la lámina dejamos de lado la pureza del hiperboloide, para contemplar el modelo lo más próximo posible al proyecto descrito. Para ello vamos a analizar la superficie moldeada en hormigón y así poder trazar sus curvas de borde. Aquí hay que señalar que la libertad del proyectista, para amoldar la geometría a las condiciones de la estructura, recorre diversos caminos en función de las decisiones del diseño y el cálculo y llegados a este punto, tal como avanzábamos, proponemos una mirada complementaria.

La superficie de la cara inferior será pues una superficie de transición entre dos familias de curvas,

por un lado, un borde poligonal sobre la línea de pórticos y un arco de rama de hipérbola en el centro del vano y en el otro sentido, dos arcos de círculo en los extremos anterior y posterior de la lámina (Figura 3.16). Todas estas son curvas planas cuya combinación produce una superficie alabeada.

Sin embargo, la complejidad geométrica de esta obra no queda reducida solo a la forma del voladizo. La estructura de la tribuna se une en su parte posterior mediante un tirante a la cubierta, creando un contrapeso que colabora en el conjunto general. A continuación, volvemos sobre el perfil del edificio y los pórticos como secciones planas (Figura 3.17).

El esquema trasversal es una lección de equilibrio en el que se rigidizan algunos elementos para lograr la mayor ligereza en otros, haciendo colaborar, en su justa medida, cada una de las partes del conjunto. Hay que destacar la complejidad geométrica de las bóvedas de hormigón que forman la cara inferior de las gradas, los vomitorios y la terraza (Figura 3.18). Aunque esta parte de la estructura queda eclipsada por la vistosa cubierta, su diseño nos interesa notablemente.

En nuestro análisis consideramos que es una superficie tórica la que se corresponde con la sala de la taquilla, entrada, etc. Una zona esférica, la que

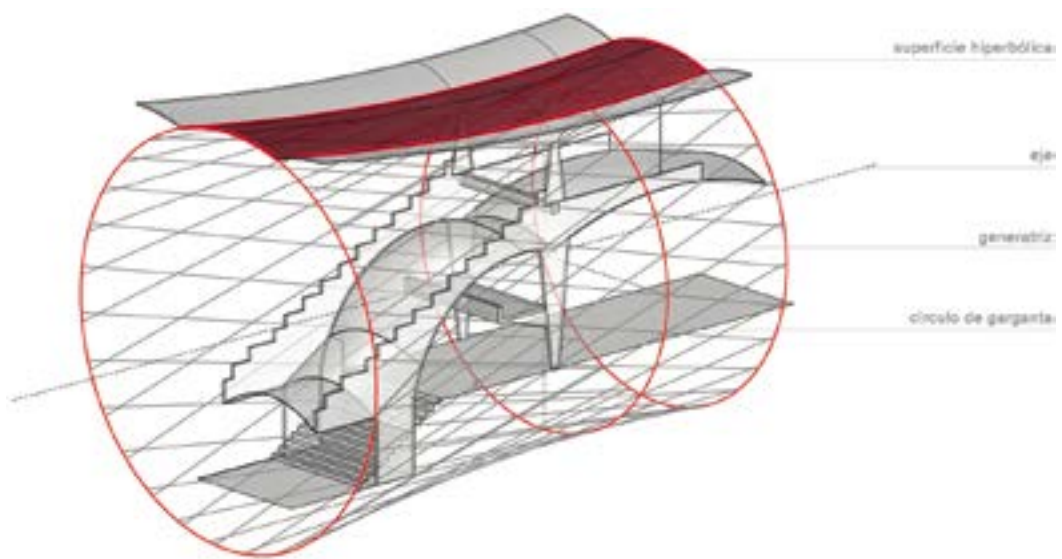


Figura 3.15. Esquema en perspectiva de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1941. Dibujo de los autores.

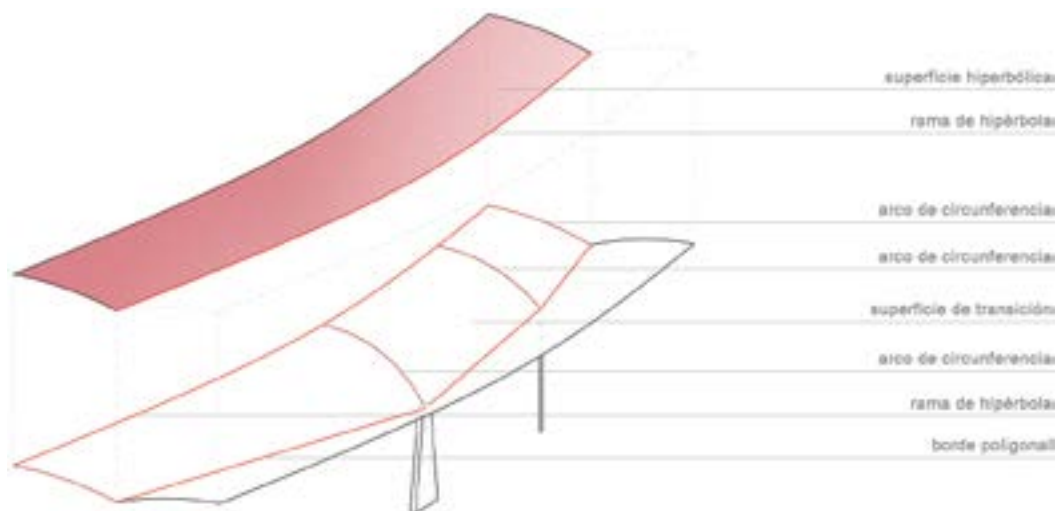


Figura 3.16 Esquema de los voladizos de la Tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1941. Dibujo de los autores.

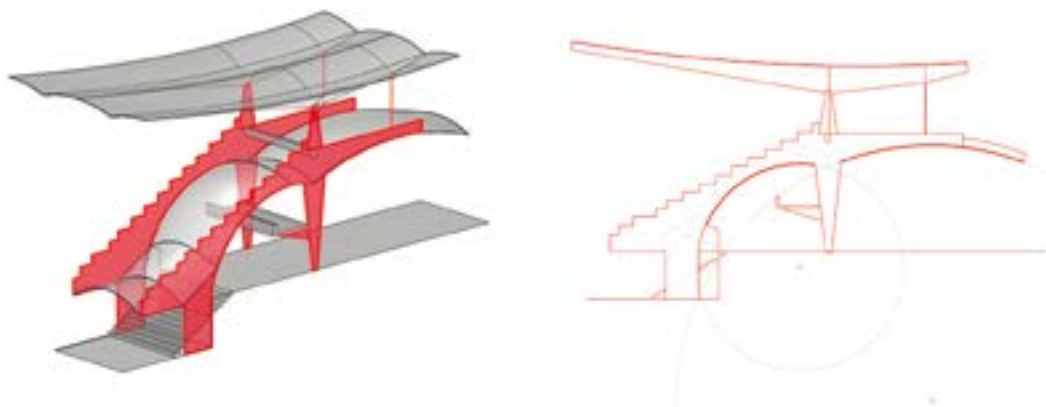


Figura 3.17. Esquema de las vigas laterales de la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1941. Dibujo de los autores.

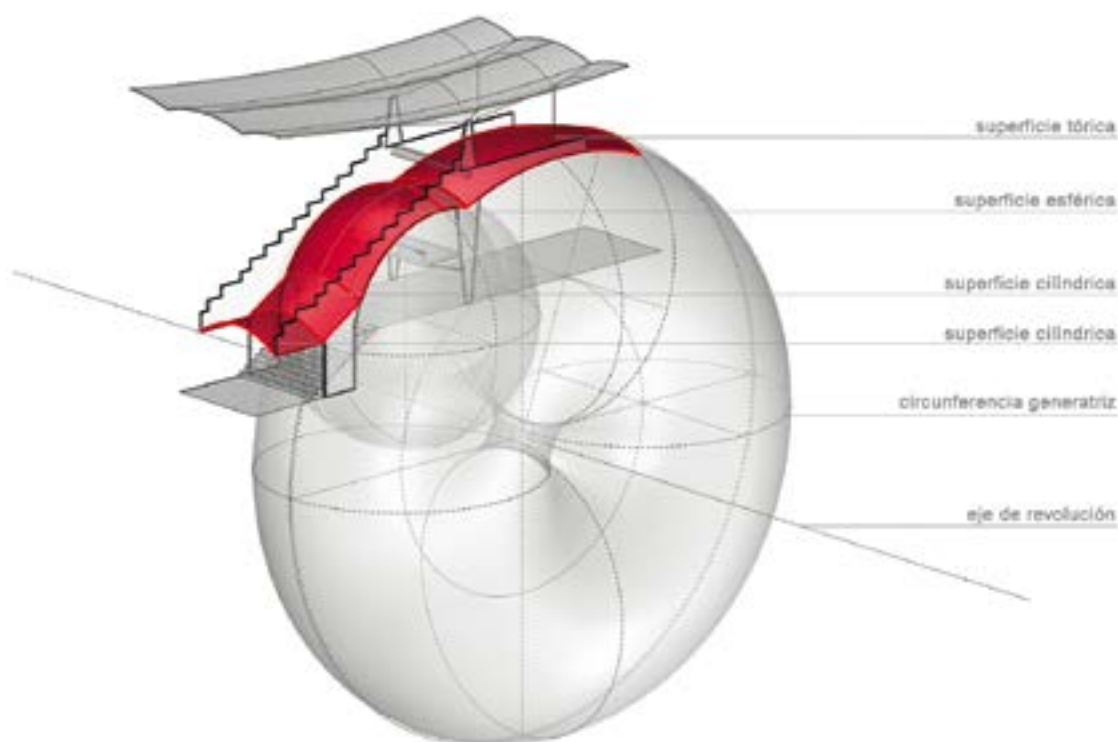


Figura 3.18. Superficies de las bóvedas de la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, Eduardo Torroja, 1941. Bajo la tribuna las bóvedas se suceden con un mismo perfil curvo, de izquierda a derecha vemos dos cilindros, una esfera y un toroide. Dibujo de los autores.

queda bajo las gradas, ya que tanto la sección transversal como la longitudinal tienen la misma curvatura en ese fragmento. Y son bóvedas cilíndricas las que cubren las escaleras de los vomitorios. Hacemos coincidir los radios de las diferentes circunferencias que configuran el perfil, pues consideramos que el encofrado bien pudo hacer uso de un arco patrón que sirviera para el trazado de todas estas bóvedas en posición transversal, de manera que en el alzado frontal del pórtico se puede dibujar el arco, para a continuación extruirlo a lo largo de la curva mixta que forma la sección.

Dentro de todas las superficies que se han trabajado, prestaremos especial atención a las superficies de revolución. En particular, vamos a trabajar con un hiperboloide de revolución, que es además una cuádrica, y que forma parte de la estructura del Hipódromo de la Zarzuela.

En general, una cuádrica es una superficie formada por aquellos puntos del espacio (x, y, z) que verifican una ecuación en tres variables determinada por un polinomio de segundo grado. Así, la ecuación general de una cuádrica viene definida por los puntos que verifican

$$A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + Hxy + Ixz + Jyz = 0 \quad (2)$$

para ciertos valores de $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ y J . En el caso particular de que se trabaje con un hiperboloide de revolución, la ecuación queda simplificada, como veremos más adelante.

La obra que queremos representar matemáticamente es la superficie que conforma la cubierta del hipódromo de la Zarzuela de Eduardo Torroja (Figura 3.19). Es conocido que esta superficie está asociada a una cuádrica. Es más, queda determinada por un hiperboloide de una hoja. En primer lugar, vamos a fijar los ejes de forma que interpretemos cada una de las características de esta obra, con el propósito de determinar su ecuación matemática. El frontal quedará determinado por las variables x y z , mientras que la profundidad será medida en la variable y .

Mediante el programa Geogebra procedemos a insertar una imagen frontal del hipódromo. La figura adjunta permite comprobar que con cortes en planos frontales se obtienen circunferencias.

Esta anterior afirmación indica que el hiperboloide de una hoja asociado a esta obra de Torroja es de revolución. En otro caso, el corte con planos de esta naturaleza hubiese dado lugar a elipses. Para simplificar la ecuación inicial de la cuádrica de forma se eliminarán a continuación distintos pa-

rámetros a la hora de determinar la ecuación del hiperboloide. Además, una situación del eje de revolución del hiperboloide en la recta $x = z = 0$ permitirá dotar de una mayor simplicidad a la ecuación obtenida.

Llegados a este punto, dejaremos a un lado la superficie particular con la que trabajamos para deducir las ecuaciones de una superficie de revolución cuando hacemos girar una curva en torno a un eje.

Ecuaciones de una superficie de revolución: Supongamos que partimos de una función $z = f(y)$, siendo $y \in I$, para cierto dominio $I \subseteq R$. Si $f(y) \geq 0$ para cada $y \in I$, es posible construir la superficie de revolución que resulta de girar la curva determinada por el grafo de la función en torno al eje $y = 0$. Por ejemplo, si la función f viene dada por $f(y) = 1$, para $y \in (-1,1)$, entonces, al hacer girar respecto al eje $x = z = 0$ la función se obtendrá un cilindro de radio.

Matemáticamente hablando, el proceso consiste en, para cada valor $y_0 \in I$, construir una circunferencia en el plano $y = y_0$, cuyo radio viene dado por el valor de $f(y_0) \geq 0$. En el caso de que este valor sea nulo, la circunferencia queda reducida a un punto.

Una manera sencilla de parametrizar esta superficie es mediante el paso a coordenadas cilíndricas. La anterior explicación permite visualizar la manera en la que se va a parametrizar la superficie. En primer lugar, haremos variar en los valores posibles, siendo $y \in I$. Luego, para cada $y_0 \in I$ fijo, la circunferencia que construimos queda parametrizada por $s \in R \rightarrow [f(y_0) \cos(s), f(y_0) \sin(s)]$ en el plano xz . Por tanto, una parametrización de la superficie es la siguiente:

$$X(u, v) = [f(v) \cos(u), v, f(v) \sin(u)]$$

para $u \in R, v \in I$. La forma implícita de esta superficie pasa por elevar al cuadrado primera y tercera componente y sumarlas de forma que se tiene:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= f(v)^2 \cos^2(u) + f(v)^2 \sin^2(u) = \\ &= f(v)^2 = f(y)^2 \end{aligned}$$

La fórmula implícita es, pues,

$$x^2 + z^2 = f(y)^2 \quad (3)$$

Volviendo al caso particular bajo estudio, la función de la que partimos es la definida por una curva muy concreta. De la ecuación (2), se observa que el número de las posibles ecuaciones que rige el com-

portamiento de nuestra superficie se reduce. De hecho, vemos en (2) que no aparecen los términos en x , ni en z . Se tiene además que $E = G = 1$, y los términos cruzados en xy, xz o yz tampoco aparecen en (2).

Además, puesto que tenemos una ecuación polinomial de segundo grado, la función $f^2(y)$ en (2) solo puede tener la forma $K + Ly + My^2$. Resumiendo, la ecuación del hiperboloide con el que se trabaja es

$$x^2 - z^2 - K - Ly - My^2 = 0 \quad (4)$$

para ciertos valores de K, L y M .

Ahora bien, si nos fijamos en las mediciones hechas para la propia cubierta, encontramos el corte de la superficie con el plano $z = 0$ (Figura 81).

Es decir, si hacemos $z = 0$ en (3), lo que equivale a hacer un corte con dicho plano a nuestro edificio obtenemos la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{3,20^2} - \frac{y^2}{13,8855^2} = 1$$

Multiplicando en la ecuación anterior ambos miembros de la igualdad por $3,20^2$, la anterior ecuación queda

$$x^2 - \frac{3,20^2 y^2}{13,8855^2} - 3,20^2 = 0$$

con lo que podemos deducir los valores de los parámetros que faltaban en (3), teniendo $M = \frac{3,20^2}{13,8855^2}$, $L = 0$ y $K = 3,20^2$.

La superficie final (Figura 3.19) es:

$$x^2 + z^2 - 3,20^2 - \frac{3,20^2}{13,8855^2} y^2 = 0$$

Basta determinar los límites entre los que queda dibujado el hiperboloide para concluir, es decir, para entre $-2,7$ y $2,7$, entre $-16,4$ y $2,5$, z entre 0 y $5,5$.

Se puede obtener una parametrización a partir de la fórmula implícita sin más que hacer uso de las reglas hiperbólicas, análogas a las trigonométricas clásicas. En este sentido, es posible usar la parametrización

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \left[a \frac{e^u + e^{-u}}{2} \cos(v), \right. \\ &\quad \left. a \frac{e^u + e^{-u}}{2} \sin(v), c \frac{e^u + e^{-u}}{2} \right] \end{aligned}$$

para a y b valores a determinar, y siendo y los parámetros que miden profundidad y giro, respectivamente.

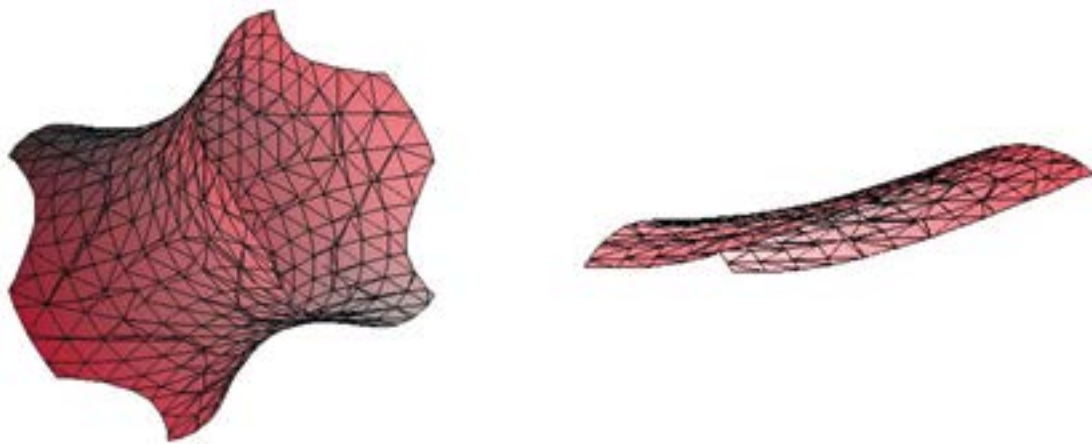


Figura 3.19. Izquierda: Hiperboloide. Dibujo realizado con la herramienta simbólica Maple. Derecha: cubierta del Hipódromo de La Zarzuela. Dibujo realizado con la herramienta simbólica Maple. Dibujo de los autores.

3.5.3. El depósito de Fedala

El depósito de agua en Fedala (Marruecos) es una obra que se construyó en 1956. Torroja utiliza el hiperboloide hiperbólico y el toroide (Figura 3.20). El cuerpo principal se forma por la combinación de dos hiperboloides de eje vertical, coincidentes en la garganta, el superior más abierto, formando real-

mente la cuba y el inferior, que envuelve los soportes perimetrales, dando una continuidad visual al conjunto (García Reig, 1999). Las superficies anulares o tóricas que forman tanto el suelo como el techo del depósito son bóvedas tabicadas de ladrillo. El principal problema de esta estructura era su estanqueidad, y se trataba de hacer que toda la superficie trabajara comprimida para evitar la fisuración

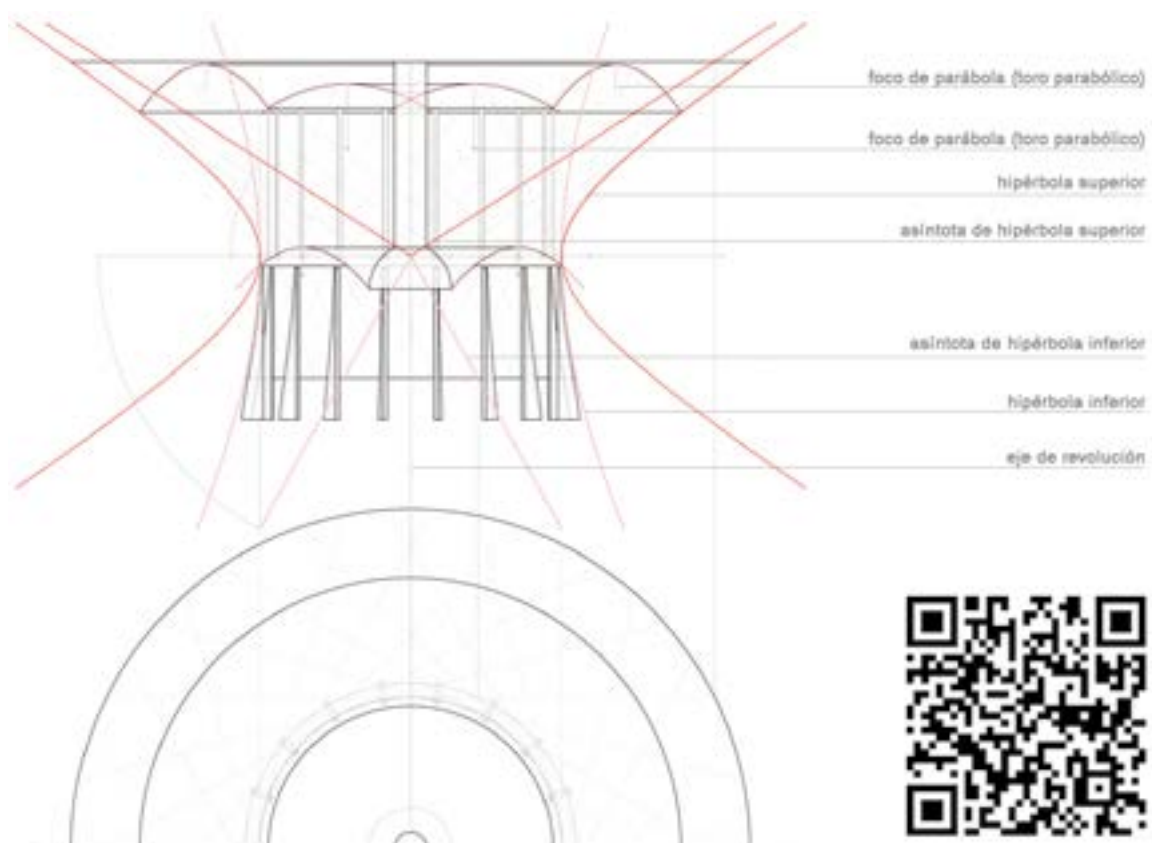


Figura 3.20. Depósito en Fedala, Marruecos, Eduardo Torroja, 1956. En la esquina inferior derecha se muestra un código QR con el que visualizar el depósito de Fedala con elementos destacados (realizado con Geogebra). Dibujo de los autores.

(Chías Navarro, Abad Balboa, 2005). De ahí que se planteara como una combinación de láminas, por un lado, la cáscara de hormigón reforzada por anillos postensados, que ejercen un empuje hacia el centro y, por otro, las bóvedas de ladrillo, que actúan en sentido contrario.

Para construir el modelo se pueden trazar las hipérbolas sobre la sección. Hay que elegir las generatrices que son rectas frontales, identificarlas en

planta y llevarlas al alzado. Esas generatrices son proyección en alzado de las asíntotas a las hipérbolas. Teniendo estas se pueden situar los focos de las curvas y trazarlas con precisión. Después se pueden generar los hiperboloides por revolución, bien de las hipérbolas o de las generatrices, respecto del eje vertical central. Las bóvedas tóricas también son superficies de revolución alrededor del mismo eje de las parábolas de la sección (Figura 3.21).

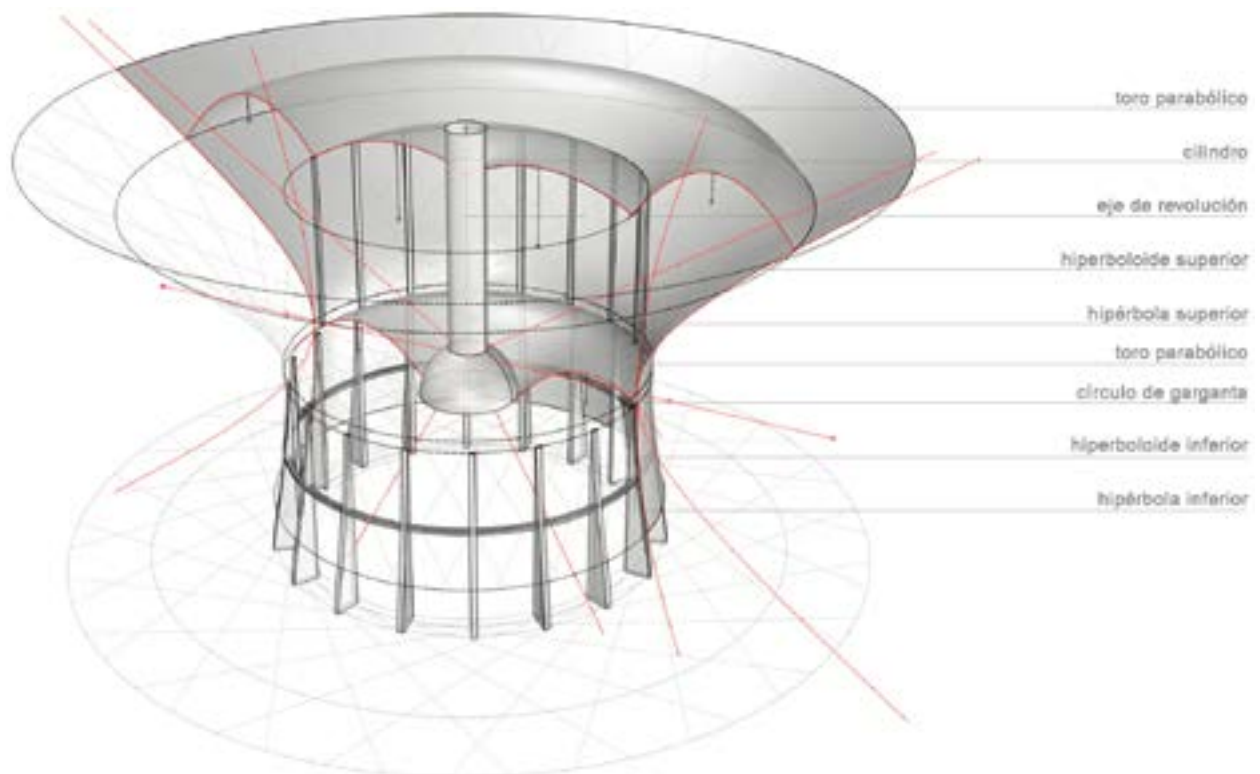


Figura 3.21. Depósito en Fedala, Marruecos, Eduardo Torroja, 1956. Se destacan las hipérbolas con sus elementos. La revolución de las asíntotas formaría los conos asíntóticos. También se marcan las parábolas que forman las bóvedas tóricas. Dibujo de los autores.

3.6. Félix Candela

Félix Candela (1910-1997) se licenció en 1935 y en 1936 como premio por su tesis doctoral,¹ le fue concedida una beca para viajar a Alemania y conocer las obras pioneras de la construcción de cáscaras de hormigón (Corres, LaTerra y Miravalle, 2010). Es conocido por su obra desarrollada en México, país al que viajó como exiliado. Su trabajo muestra tres ideas esenciales de la ingeniería «en primer lugar, el

ethos ingenieril, el impulso por conservar los recursos naturales, en segundo lugar, la ética o resistencia al desperdicio de dinero y en tercer lugar la estética de la ingeniería, evitar la fealdad» (Garlock, Billington, 2009). Candela diseñó las estructuras, hizo los cálculos y actuó como constructor. Él mismo declaró en diversas ocasiones que no se sentía arquitecto, desautorizando la actitud desdeñosa de estos hacia el dominio de la técnica (Mateo, Gausa y Thorne, 1986).

También afirmaba que, para ser un artista en el terreno de la edificación, es necesario ser tu propio constructor, asociado la libertad profesional a la independencia económica. Candela demostró una especial habilidad para entender el funcionamiento de las cáscaras de hormigón. Frente a la teoría elástica,

1. Félix Candela presentó la tesis «La influencia de las nuevas tendencias en las técnicas del hormigón armado sobre las Formas Arquitectónicas» con el fin de obtener una beca que le permitiera viajar a Alemania para conocer las obras de los ingenieros alemanes Dischinger y Finsterwalder. Nunca llegó a cumplir su plan debido al comienzo de la guerra civil española.

de difícil aplicación práctica, Candela optó por métodos más sencillos, basados en los estados de equilibrio que la estructura adopta dependiendo de su geometría (Martínez, M., 2018).

Utilizó numerosas superficies para sus estructuras, cilindros de directriz catenaria, conos, conoides, cúpulas esféricas, etc. Pero fue el paraboloide hiperbólico el que mejor cumplió las condiciones de eficiencia que el diseñador buscaba. Es una superficie anticlástica,² y esto otorga una gran rigidez a una membrana o cáscara. Además, la construcción se puede controlar con relativa facilidad, gracias a que tiene dos sistemas de generatrices rectas que se cortan en cada punto, siempre paralelas al plano director de su familia.

Para sus diseños en forma de paraguas, Félix Candela tomó como referencia la teoría de Aimond (1936), aunque refinó notablemente su diseño. Esta estructura, según sus propias palabras, era muy productiva, pues se podían reutilizar encofrados, se montaba con sencillez, y los carpinteros eran capaces de mover hasta cuatro cimbras en un día (Mateo, Gausa y Thorne, 1986). Además, resuelve todos los problemas con un solo elemento, estructura, cubierta, inclinándolo podía ser un lucernario, aunque tenía el inconveniente de que si se obstruía la ba-

jante central y se llenaba de agua la carga podía descentrarse y producir el colapso. Para evitarlo propuso incluir rebosaderos de aviso.

Las obras construidas en España en las que participó Félix Candela fueron la iglesia de Nuestra Señora de Guadalupe, en Madrid (1963), incluida en este estudio y finalmente dos cubiertas en el Oceanográfico de Valencia, cuya construcción estaba en marcha cuando el arquitecto falleció (1997). También destacan los proyectos que realizó junto con Emilio Pérez Piñero, pero no llegaron a construirse.

3.6.1. Pabellón de los rayos cósmicos

Para el diseño del Pabellón de los Rayos Cósmicos (1951) el arquitecto de la obra había solicitado la forma de bóveda de cañón. Como constructor y diseñador estructural, Candela decidió cambiar la forma de cilindro por la de una cáscara compuesta por dos paraboloides hiperbólicos, a modo de una doble silla de montar.

Para construir el modelo gráfico, desde los alzados se dibujan dos parábolas principales, una de cada familia, paralelas a sendos planos bisectores (Figura 3.22). Después, se extruye una curva a lo lar-

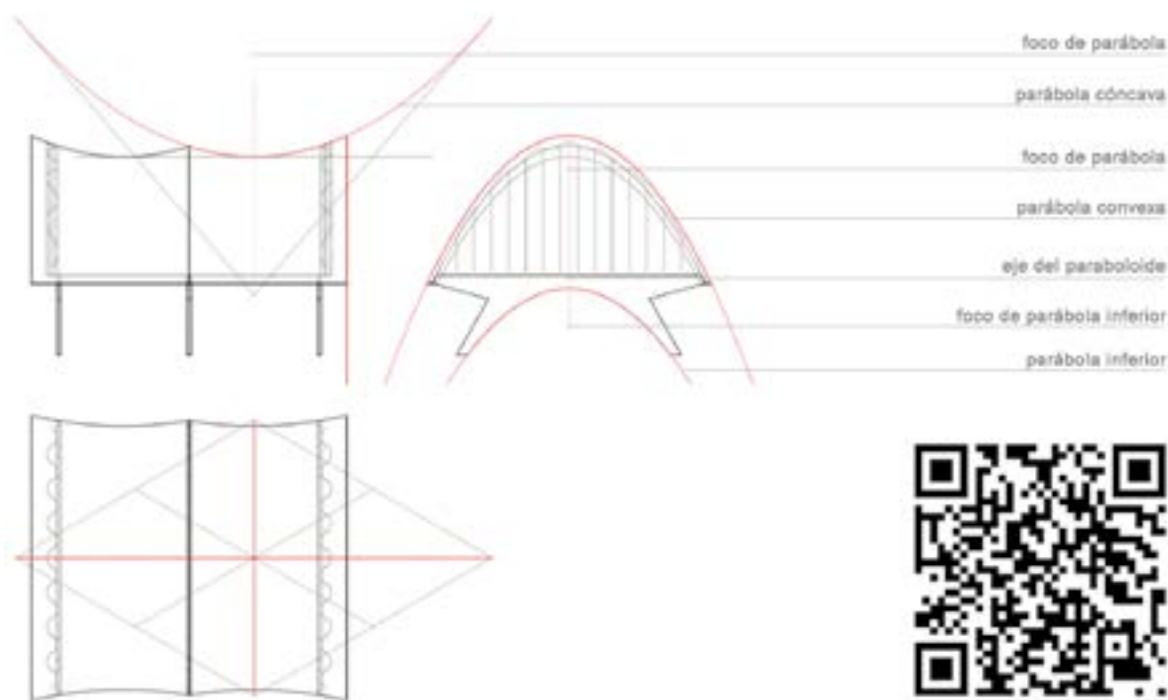


Figura 3.22. Esquema de planta y alzados, Pabellón de los Rayos Cósmicos, Félix Candela, 1951. Se subraya la forma del paraboloide hiperbólico que forma las cáscaras del pabellón. En la esquina inferior derecha se muestra un código QR que da acceso a la animación realizada en Geogebra de las superficies principales. Dibujo de los autores.

2. *Anticlástica*: se dice de una superficie curva que se sitúa a dos lados del plano tangente en un punto de esta.

go de la otra para generar el paraboloide hiperbólico. A continuación, se toma el vértice de este y se encuentra el plano tangente en ese punto. Vemos que el eje es vertical y el plano tangente en el vértice es horizontal. Las intersecciones entre ese plano y la superficie son las dos generatrices principales. De esa

manera se tienen los planos directores, planos paralelos a las generatrices principales a la vez que al eje, y los planos bisectores, planos paralelos a las parábolas principales y al eje. De esta manera, la superficie queda totalmente definida por sus planos directores, eje, vértice, parábolas y generatrices (Figura 3.23).

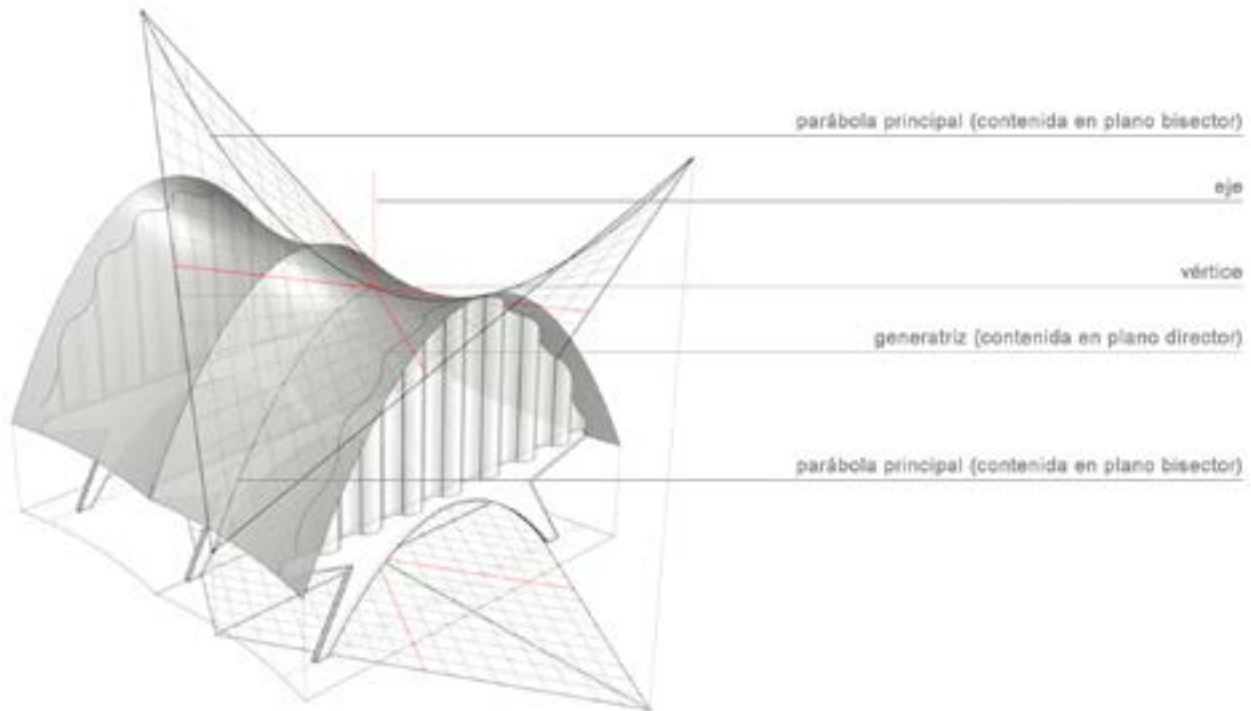


Figura 3.23. Esquema en perspectiva del Pabellón de los Rayos Cósmicos, de Félix Candela, 1951. Se indican los elementos del paraboloide, eje, vértice, generatrices principales, coincidentes con los planos directores y parábolas principales, paralelas a los planos bisectores. Dibujo de los autores.

3.6.2. Restaurante Los Manantiales

Para el restaurante en Xochimilco, de nuevo produjo Candela un modelo estructuralmente audaz sobre una idea previa, aprovechando la libertad que le ofrecía ser el contratista principal, una vez conseguida una cierta fama como diseñador de estructuras (Garlock, Billington, 2009).

El restaurante Los Manantiales, de 1957, es una bóveda de arista compuesta por cuatro paraboloides apoyados en los extremos de sus intersecciones y con los bordes libres cortados por un plano inclinado (Figura 3.24). Como ya hemos visto, el paraboloide hiperbólico es una superficie reglada y alabeada (Figura 3.25). Se puede generar con una recta o generatriz que se desplaza sobre otras dos rectas o directrices, manteniéndose paralela a un plano dado, conocido como *plano director*. Se configuran así dos familias de rectas que se cortan entre sí y a las que podemos denominar indistintamente *generatrices* o *directrices*.

También se puede configurar como la extrusión de una parábola a lo largo de otra de diferente dirección y sentido (silla de montar). Sobre el alzado de la cubierta del restaurante se pueden trazar las parábolas principales de la superficie. La parábola que se abre hacia arriba tendrá su vértice en V y eje vertical e . La sección aporta esta curva directamente. Por otro lado, la parábola que se abre hacia abajo se hace aparente en el apoyo, con vértice en M y eje n .

La superficie del paraboloide hiperbólico a través de sus parábolas se configura como una extrusión de una parábola a lo largo de la otra parábola, esto hace que se mantenga la parábola generatriz siempre paralela al mismo plano (vertical). La simetría de la planta genera las intersecciones entre paraboloides, dividiendo la circunferencia en ocho partes (o cuatro diámetros) centradas sobre el eje del paraboloide. El corte con un plano oblicuo de cada uno de los fragmentos o lunetos de la superficie otorga esa forma curva de los bordes. Si en lugar de una bóveda de ocho sectores se deseara elabo-

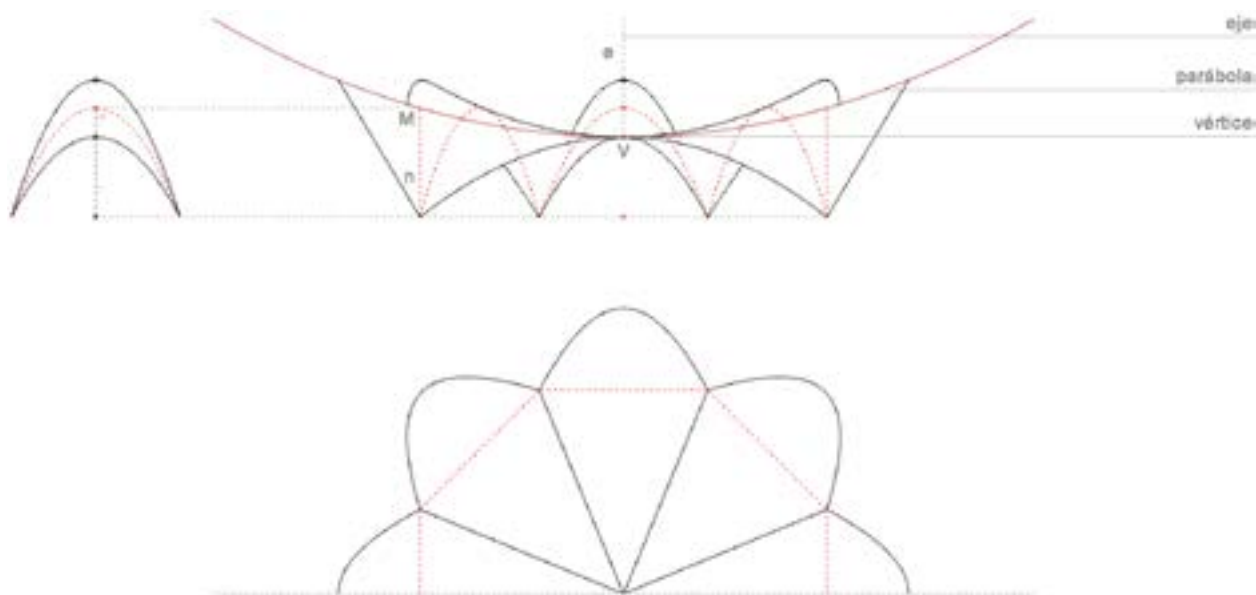


Figura 3.24. Planta y alzados del restaurante Los Manantiales, de Félix Candela, 1957. Se indican los elementos de las parábolas. Dibujo de los autores.

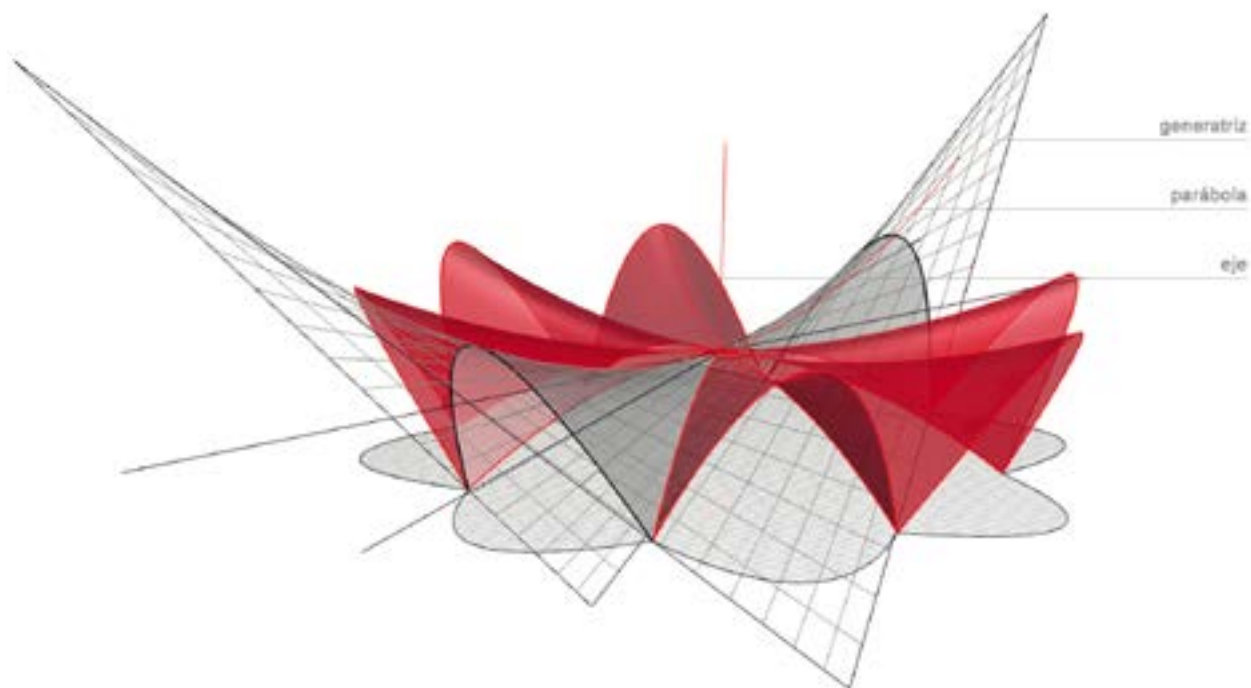


Figura 3.25. Restaurante Los Manantiales, de Félix Candela, 1957. El conjunto está compuesto por cuatro paraboloides hiperbólicos. Se superpone el paraboloides dado como cuadrilátero alabeado sobre la cubierta. Dibujo de los autores.

rar de un número diferente, habría que considerar el ángulo adecuado entre las líneas de corte que pasan por el vértice. Esto se puede hacer, por ejemplo, superponiendo en planta un polígono con el número de lados deseado, que nos daría los ángulos de intersección.

Es importante expresar el paraboloides como superficie reglada. Para ello tenemos que atender a la

posición de los planos directores, que en planta coinciden con las proyecciones de las dos familias de rectas llamadas *directrices* y *generatrices*. Por cualquier punto de la superficie pasarán dos rectas, que pertenecerán enteramente a ella, una corresponderá a una de las familias, llamémosle, por ejemplo, *generatrices* y la otra a la que podría denominarse *directrices*, aunque esta denominación se puede intercambiar.

La técnica que se utiliza en este edificio será la explotación de las simetrías de este respecto a un plano para simplificar sus ecuaciones. Este tipo de superficies serán más sencillas de parametrizar cuando situamos estos planos de simetría de forma adecuada.

Supongamos que trabajamos con una superficie regular definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, y que esta superficie es simétrica respecto al plano $z = 0$. En ese caso, si un punto (x_0, y_0, z_0) pertenece a la superficie, es decir, cumple que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, entonces también ocurre que el punto $(x_0, y_0, -z_0)$ pertenece a la superficie, por simetría. Por tanto, se tiene también que $F(x_0, y_0, z_0)$.

En ciertos casos, es posible explotar las simetrías que presentan ciertas obras a la hora de obtener una parametrización de la superficie que queremos representar, o, en el caso de buscar su ecuación, simplificará enormemente el trabajo. Esto queda plas-

mado en el estudio que haremos a continuación sobre el restaurante Los Manantiales, de Félix Candela.

Dicho restaurante se basa en la forma geométrica de un paraboloide hiperbólico. Esta es una superficie cuádrica, es decir, para la que la ecuación que la define $F(x, y, z) = 0$, la función F resulta ser un polinomio de segundo grado. Dicha superficie, tras ciertos cambios afines, puede escribirse en la forma siguiente:

$$Ax^2 - By^2 = z$$

donde A y B son cantidades positivas. Se puede observar de la ecuación anterior que, haciendo un corte con ejes de la forma $z = cte$ podemos obtener hipérbolas, mientras que con cortes con ejes paralelos a $x = 0$ o a $y = 0$ resultan parábolas.

En la Figura 3.26 aparecen algunos cortes con planos apareciendo parábolas e hipérbolas.

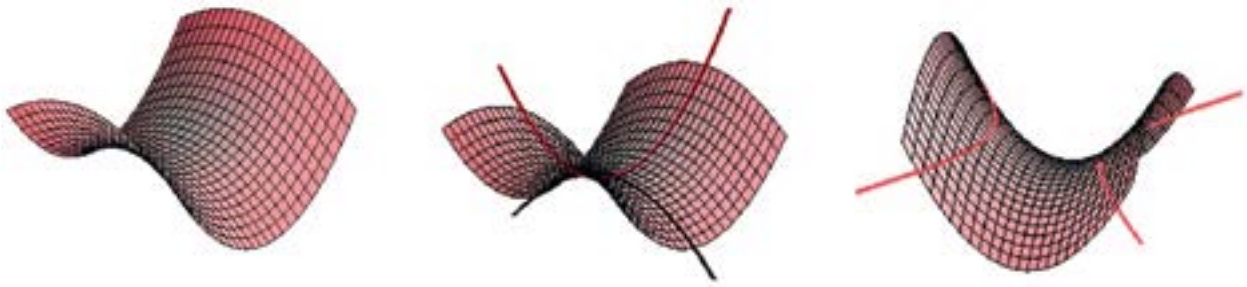


Figura 3.26. Izquierda: paraboloide. Centro: corte del paraboloide con los planos bisectores, resultando dos parábolas. Derecha: corte del paraboloide con un plano horizontal, resultando una hipérbola. Dibujos realizados con la herramienta simbólica Maple por los autores. Dibujo de los autores.

La obra con las que trabajaremos se desarrolla a partir de un paraboloide, cuya ecuación determinaremos, haciendo uso de las propiedades de simetría de este. Consideramos los planos para dibujar uno de los paraboloides que configuran la estructura.

La ecuación de una cuádrica, en general, viene dada por:

$$A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + Hxy + Ixz + Jyz = 0$$

para ciertos valores de $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Vamos a considerar como plano de simetría para el paraboloide con el que trabajaremos el plano $x = 0$. Así, si un punto (x_0, y_0, z_0) con $x_0 \neq 0$ forma parte del paraboloide, también lo hará $(-x_0, y_0, z_0)$. De ahí que se tenga que las dos ecuaciones

$$A + Bx_0 + Cy_0 + Dz_0 + Ex_0^2 + Fy_0^2 + Gz_0^2 - Hx_0y_0 - Ix_0z_0 + Jy_0z_0 = 0$$

y

$$A - Bx_0 + Cy_0 + Dz_0 + Ex_0^2 + Fy_0^2 + Gz_0^2 - Hx_0y_0 - Ix_0z_0 + Jy_0z_0 = 0$$

se cumplan al mismo tiempo. Restando una de otra tenemos que:

$$2Bx_0 + 2Hx_0y_0 + 2Ix_0z_0 = 0$$

luego se cumple que $B + Hy_0 + Iz_0 = 0$. Haciendo variar el punto obtenemos un sistema con tres incógnitas y tantas ecuaciones distintas (y no relacionadas entre sí) como queramos. De aquí que podamos poner $B = H = I = 0$. Hemos aprovechado la simetría del paraboloide para reducir su ecuación a:

$$A + Cy + Dz + Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + Jyz = 0$$

También, el paraboloide es simétrico con respecto al plano $y = 0$ por lo que realizando el mismo

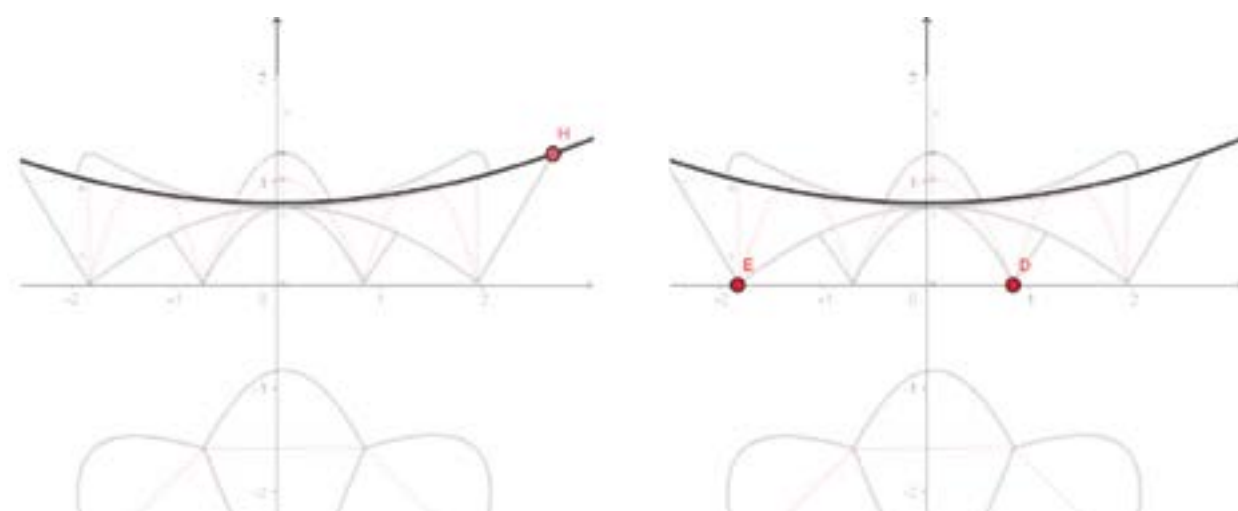


Figura 3.27. Izquierda: curva aproximante. Derecha: puntos de control. Dibujo de los autores.

proceso tenemos la ecuación aún más determinada que antes en la forma:

$$A + Dz + Ex^2 + Fu^2 + Gz^2 = 0 \quad (5)$$

Para el resto de parámetros que faltan realizaremos, en primer lugar, un corte con el plano $x = 0$. Tomando una de las vistas del paraboloides y asignando de forma adecuada los ejes, el programa Geogebra nos proporciona las ecuaciones de una de las parábolas que conforman la estructura (Figura 3.27).

La ecuación que el programa Geogebra nos proporciona, reescrita en las variables que nos interesan, es $y^2 - 15,2z = 12,16$. Es decir, haciendo $x = 0$ en la ecuación del paraboloides (5) se obtiene la ecuación anterior, por lo que ya se puede asignar los valores de otro buen número de parámetros en la ecuación, quedando:

$$12,16 - 15,2z + Ex^2 + y^2 = 0$$

Por último, el valor de E puede descubrirse conociendo un punto en el paraboloides. Por ejemplo, de nuevo mediante Geogebra, y teniendo en cuenta la asignación de ejes con respecto a la figura, y de nuevo su simetría se tiene que el punto $(0,7, 2, 0)$ pertenece al paraboloides (Figura 3.27).

Sustituyendo este punto en la ecuación llegamos a que $E = \frac{-12,16 - 4}{0,7^2}$.

La representación de la superficie viene determinada por la ecuación implícita:

$$12,16 - 15,2z - 33,87x^2 + y^2 = 0$$

Una representación con Maple (Figura 3.28) da lugar a la siguiente figura:

$$e = (-12,6 - 4)/(0,7 \times 0,7); f: = 1; g: = 0; h: = 0; \\ i1: = 0; j: = 0; b: = 0; c: = 0; d: = -15,2; a: = 12,16;$$

$$e: = -33,87755102$$

$$f: = 1$$

$$g: = 0$$

$$h: = 0$$

$$i1: = 0$$

$$j: = 0$$

$$b: = 0$$

$$c: = 0$$

$$d: = -15,2$$

$$a: = 12,16$$



Figura 3.28. Izquierda: imagen Maple. Derecha: imagen de Geogebra. Dibujo de los autores.

$\text{implicitplot3d}(e \times x^2 + f \times y^2 + g \times z^2 + h \times x \times y + i \times x \times z + j \times y \times z + b \times x + c \times y + d \times z + a = 0, x = -0,7 \dots 0,7, y = -2,86 \dots 2,86, z = 0 \dots 1,28, \text{scaling}=\text{constrained})$.

3.6.3. Capilla de Palmira en Cuernavaca

En 1958, los arquitectos Rosell y Larrosa, entraron en contacto con Félix Candela, al que mostraron un di-

seño de una cubierta triangular de grandes dimensiones para una capilla al aire libre (Figura 3.29). Este propuso levantar una superficie curva de hormigón en forma de paraboloides hiperbólicos, que finalmente fue la capilla de Palmira en Cuernavaca. En esta obra Candela lleva al extremo la audacia de la cáscara de borde libre. Intuye que el paraboloides hiperbólico podía conducir las tensiones de borde hacia el interior, y esto le lleva a prescindir del arco de refuerzo en la parábola de la boca (Basterra Otero, 2001).

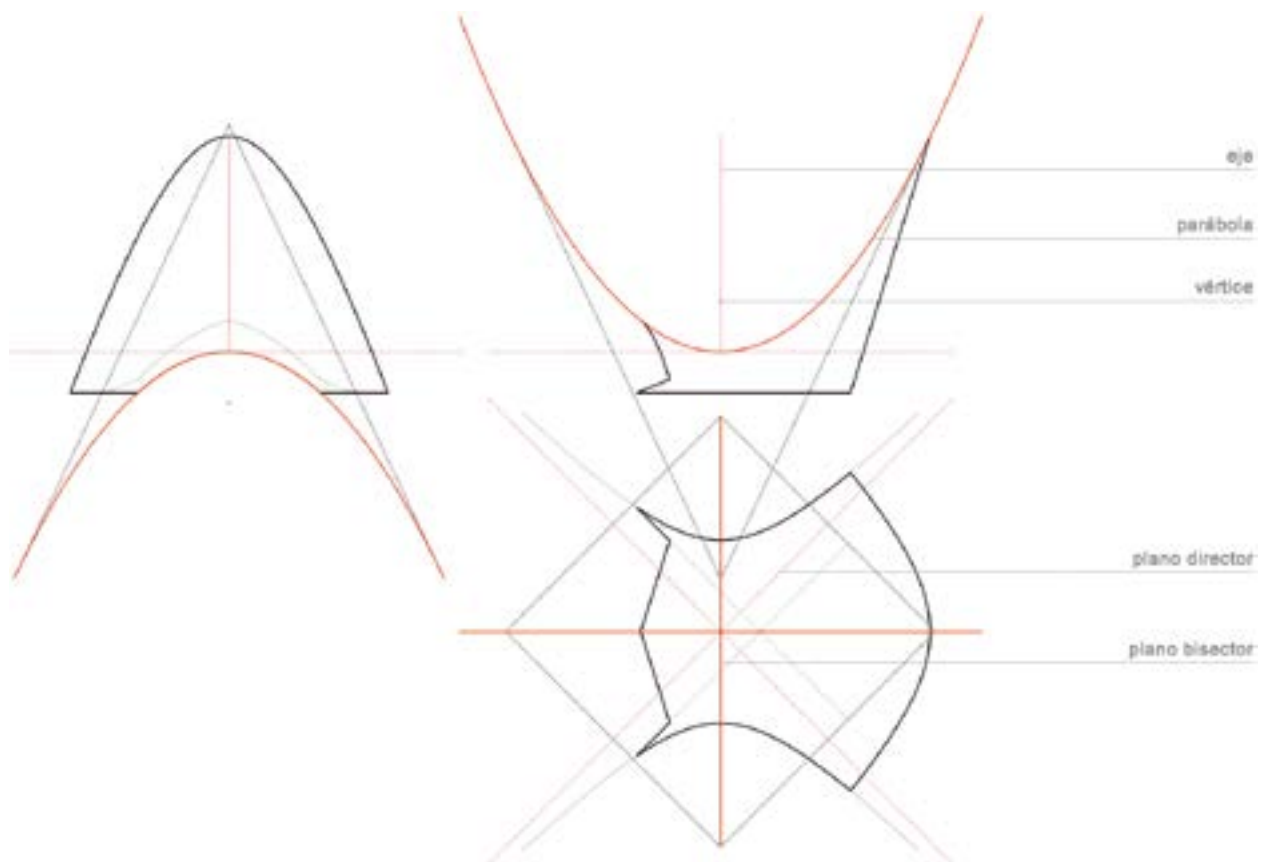


Figura 3.29. Esquemas de planta y alzados, capilla de Palmira en Cuernavaca, México, Félix Candela, 1958. Dibujo de los autores.

A partir de los alzados se deducen las parábolas principales, y extruyendo una a lo largo de otra se obtiene la superficie (Figura 3.30). Desde el plano tangente horizontal se hallan las generatrices principales, y con ellas los planos directores, que son verticales, como el eje de la superficie. La intersección del paraboloides hiperbólico con el plano del suelo genera una hipérbola. Los planos directores se sitúan a 45 grados en planta porque las parábolas principales son iguales, caso poco frecuente en los proyectos de Félix Candela. Los bordes de la capilla son curvas definidas por el corte de planos inclinados sobre la superficie. La curva del frente posterior

se obtiene por corte de dos planos verticales que generan dos arcos de parábola, coincidentes en el plano de simetría. Este borde sí lleva un refuerzo en forma de viga que rigidiza el conjunto. En los apoyos se utilizan las direcciones de las generatrices para dar forma a unas prolongaciones laterales de la cáscara en el terreno.

3.6.4. Planta embotelladora Bacardí

En 1960 Candela recibió el encargo de realizar como diseñador y constructor la planta de la embotelladora

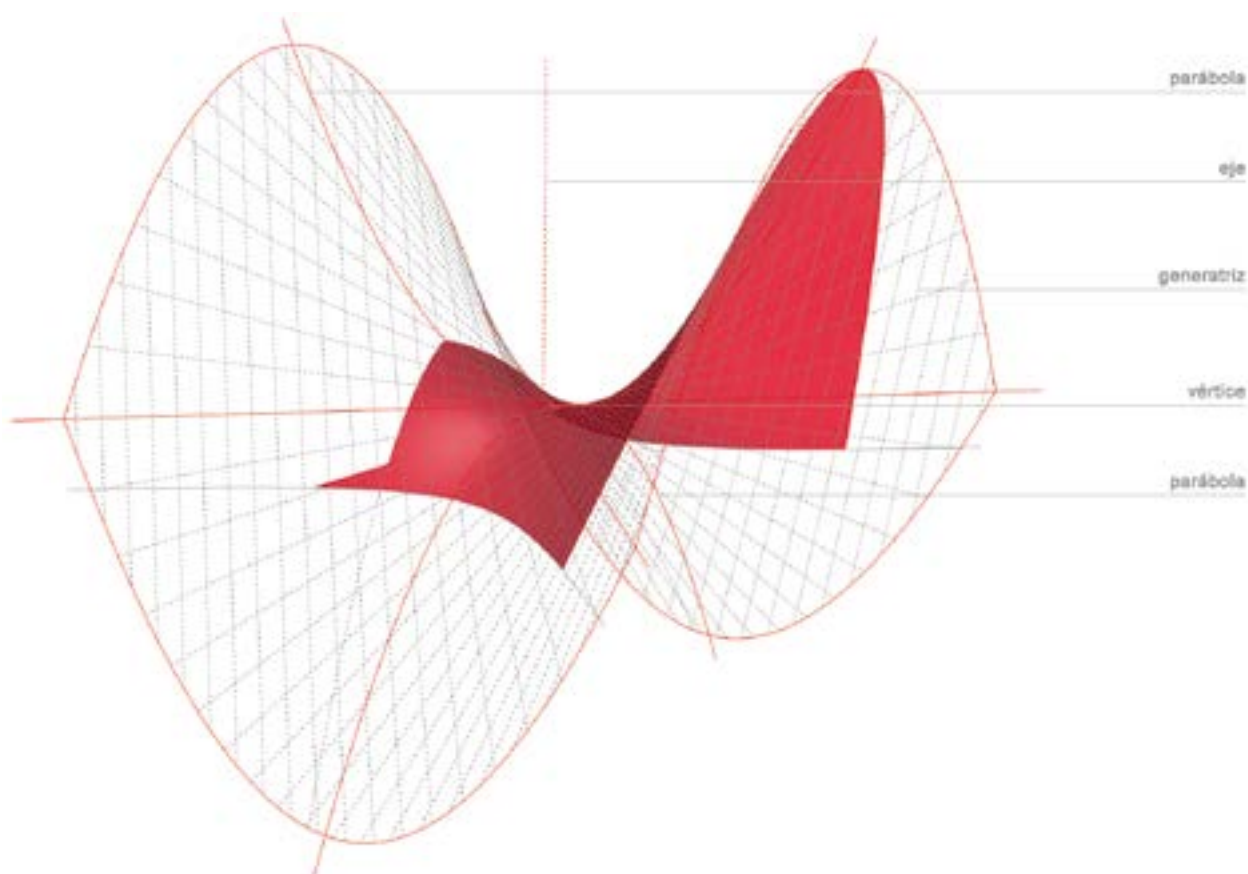


Figura 3.30. Esquemas en perspectiva, capilla de Palmira en Cuernavaca, México, Félix Candela, 1958. Se muestra el paraboloides equilátero completo del que se extrae la superficie de la cubierta. Dibujo de los autores.

Bacardí. Unos años antes (1954), el arquitecto Minoru Yamasaki junto con el ingeniero Anton Tedesco habían realizado la terminal del aeropuerto de San Luis, en la que construyeron tres grandes bóvedas de arista que dejaban pasar la luz por rendijas abiertas entre los cilindros de las cáscaras de hormigón. En la planta embotelladora, la estructura emula esas bóvedas de arista y sus aberturas de luz, pero utiliza para

ello la intersección de dos paraboloides hiperbólicos, formando una planta cuadrada con los apoyos en las esquinas. Las cáscaras se cortan perimetralmente con planos inclinados que producen un perfil parabólico sesgado, tanto en los bordes como en el contacto con las otras bóvedas. Las aberturas producidas en los encuentros se convierten en las citadas entradas de luz, que subrayan las formas de la cubierta (Figura 3.31).

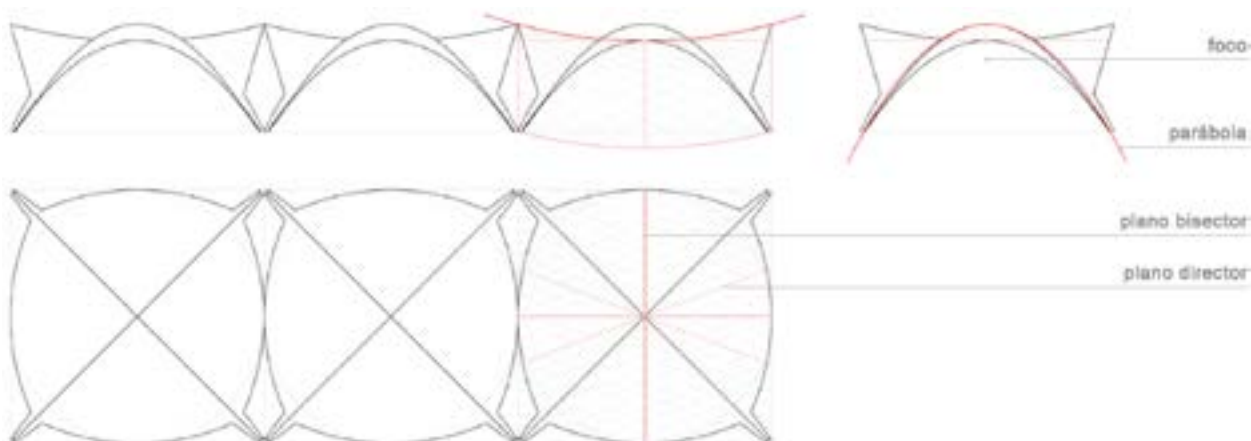


Figura 3.31. Esquema de planta y alzados de embotelladora Bacardí, Tultitlán, México, Félix Candela, 1960. Dibujo de los autores.

Esta cubierta muestra paraboloides formados por dos parábolas principales muy diferentes. La que une los puntos más altos con los apoyos de la estructura es mucho más cerrada que la que recorre la línea superior central. Esto hace que los planos directores

formen un ángulo muy alejado de los 45 grados. La forma del borde es una parábola inclinada que se obtiene cortando la superficie por un plano oblicuo, mientras los apoyos, que también son parte de la superficie, se recortan mediante un plano vertical (Figura 3.32).

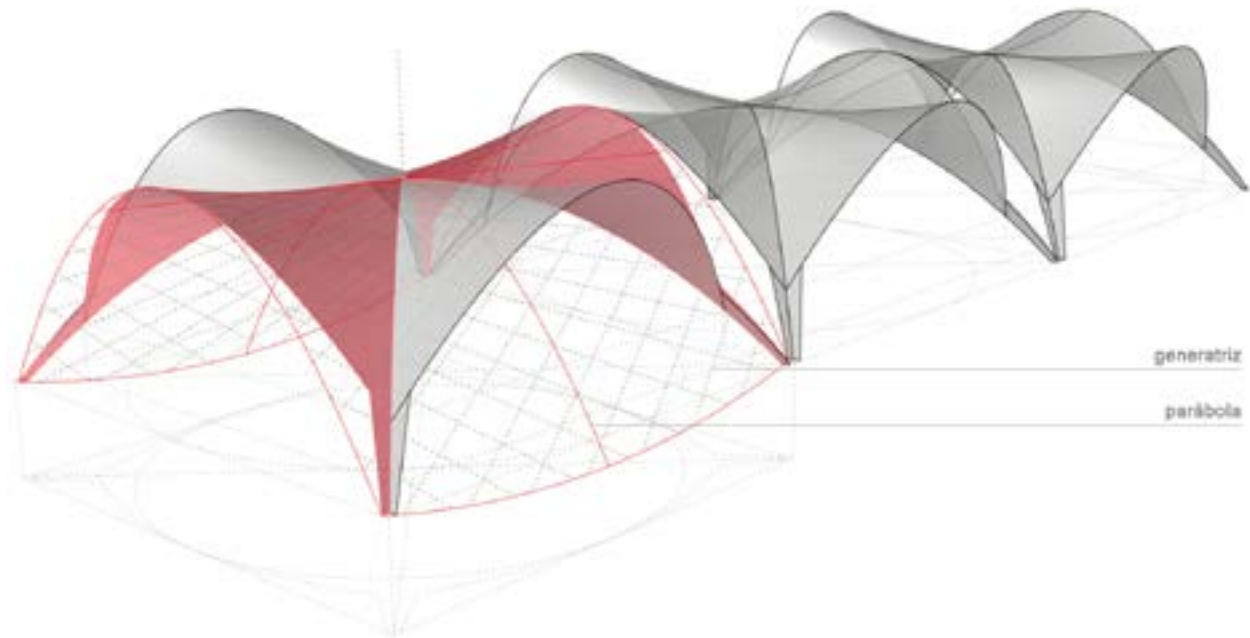


Figura 3.32 Perspectiva de la embotelladora Bacardí, Tultitlán, México, Félix Candela, 1960. El conjunto se forma por intersección de dos paraboloides hiperbólicos y se repite tres veces. Dibujo de los autores.

3.6.5. Nuestra Señora de Guadalupe

Nuestra Señora de Guadalupe (1963) es una iglesia construida en Madrid, en cuyo proyecto Félix Candela actuó como consultor. Su cubierta está formada por paraboloides hiperbólicos definidos por cuadriláteros alabeados. Son ocho cáscaras hyper de 4 cm de espesor. En el centro, las superficies se abren dejando pasar la luz por un lucernario metálico que se integra con las cáscaras de hormigón. Las paredes están formadas por láminas plegadas de hormigón y vidrieras. En otros proyectos hemos visto que el eje del paraboloide es vertical, lo que facilita encontrar el vértice de la superficie y las generatrices principales.

En esta obra la proyección horizontal del paraboloide es un cuadrilátero en el que los lados no son paralelos. Esto significa que los planos directores no son verticales. Se puede comprobar que hay un eje de simetría en cada sector, radial a la capilla en planta, en el que apoyarse para encontrar una de las parábolas principales (Figura 3.33).

Elevando a sus cotas los vértices de esta figura, podemos generar en el espacio el cuadrilátero alabeado correspondiente a cada cáscara, que será una

superficie dada por cuatro puntos. Los planos directores se podrán encontrar seleccionando dos generatrices cualesquiera de cada familia, desplazando una hasta superponerla con la otra y formando con ambas un plano. La intersección de los dos planos (uno de cada familia) nos dará la dirección del eje. Para situar este eje en el vértice del paraboloide habrá que encontrar el punto en el que el plano perpendicular al mismo sea tangente a la superficie. Sobre la sección parabólica que define el plano de simetría citado se puede hallar esta tangente, que nos dará la posición del vértice (Figura 3.34).

Como técnica matemática a utilizar en esta obra destacamos la creación de superficies regladas a partir de la unión de los puntos correspondientes de dos segmentos. Para ello consideramos los segmentos de extremos $(a, 0, c)$ y $(0, 0, b)$, y el segmento de extremos $(d, d, 0)$ y $(0, a, c)$, para ciertos números reales a, b, c, d . Se realiza la combinación convexa de ellos y se unen mediante un segmento, de esta forma:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \frac{v}{d} A(u) + \frac{d-v}{d} B(u) = \\ &= [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \end{aligned}$$

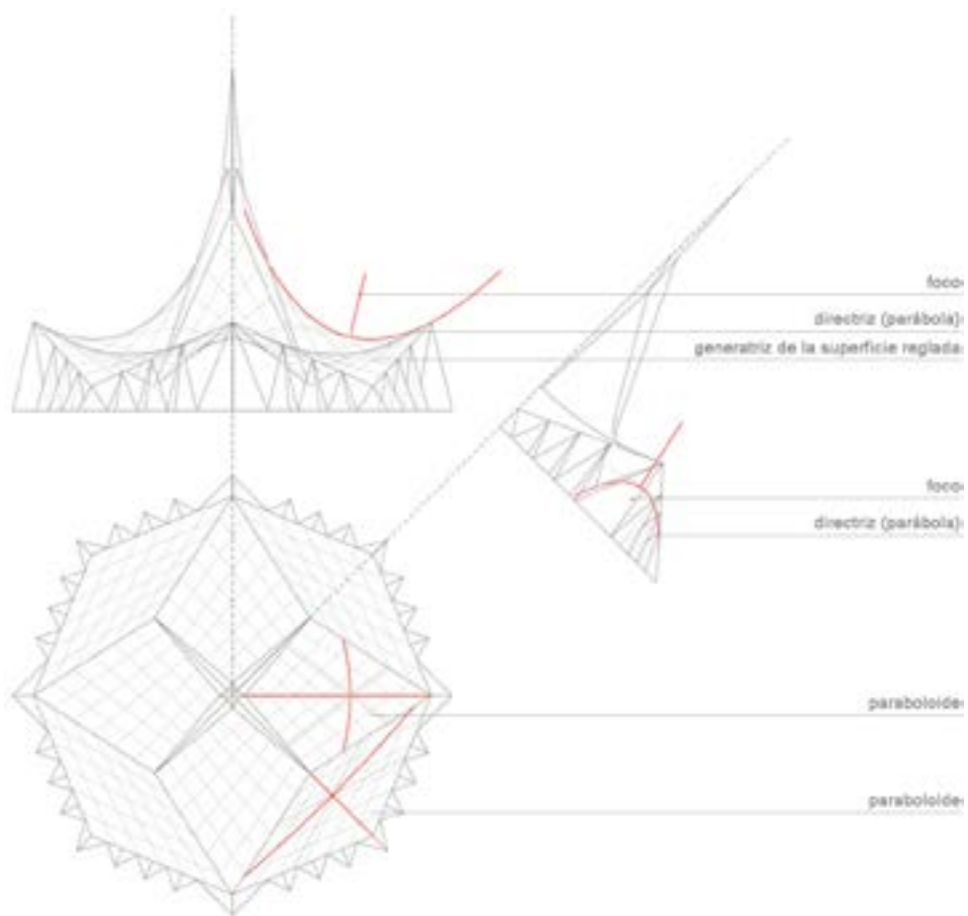


Figura 3.33. Esquema de planta y alzados de Nuestra Señora de Guadalupe, Madrid, Félix Candela, 1963. Los paraboloides hiperbólicos no tienen su eje vertical y eso produce en planta cuadriláteros con lados no paralelos. Dibujo de los autores.

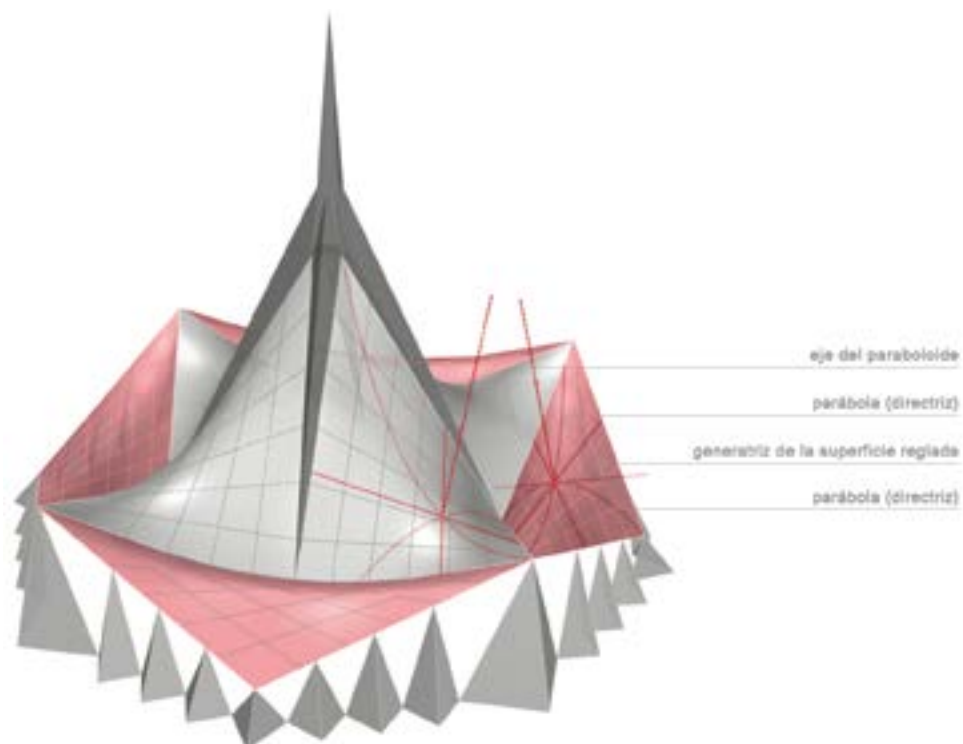


Figura 3.34. Esquema en perspectiva de Nuestra Señora de Guadalupe, Madrid, Félix Candela, 1963. Dibujo de los autores.

donde $A(u) + \frac{v}{d}(0, a, c) + \frac{d-u}{d}(d, d, 0)$, y siendo $B(u) + \frac{v}{d}(0, 0, b) + \frac{d-u}{d}(a, 0, c)$.

para ambos en el intervalo $(0, d)$. La Figura 3.35 muestra el resultado, junto con el giro de dicha superficie a través de las parametrizaciones:

$$[-x(u, v), y(u, v), z(u, v)], [-x(u, v), -y(u, v), -z(u, v)], [x(u, v), -y(u, v), z(u, v)]$$

que dibujan los simétricos respecto a los planos $x = 0$, $x = y$, $y = 0$, respectivamente.

Obsérvese que en el caso de que los valores de los parámetros a y d coincidan, la superficie se encuentra contenida en el paraboloide

$$a^2z = (c - b)a(x + y) + (b - 2c)xy + ba^2.$$

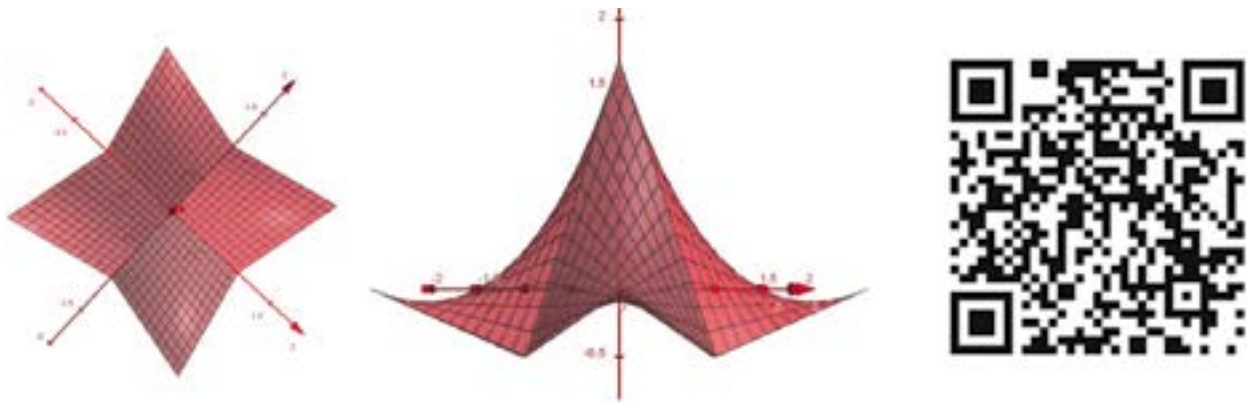


Figura 3.35. Izquierda y centro: Nuestra Señora de Guadalupe a partir de GeoGebra. Derecha: código QR con animación de Nuestra Señora de Guadalupe a partir de GeoGebra. Dibujo de los autores.

3.7. Matthew Nowicki

Nowicki (1910-1950) fue un arquitecto polaco formado en la Escuela Politécnica de Varsovia entre 1929 y 1936. Tras la segunda guerra mundial se trasladó a los Estados Unidos como asesor de la sede de Naciones Unidas en Nueva York. Su carrera profesional comenzó de manera muy pujante, aunque se truncó prematuramente por un accidente de aviación a los cuarenta años de edad. En 1948 fue contratado como docente en el Departamento de Arquitectura de la Escuela de Diseño de la North Carolina State University (NCSU). Ese mismo año le encargaron el nuevo edificio de la feria de North Carolina, conocido como Dorton Arena. Su último encargo fue un proyecto de urbanismo para la ciudad de Chandigarh en 1950. A la vuelta de uno de sus viajes a la India, el avión en el que viajaba se estrelló en el desierto egipcio. Su esposa, Stanislava Nowicki, también arquitecta, enseñó en la Universidad de Pennsylvania desde 1951 hasta 1977.

3.7.1. Dorton Arena

Este edificio se encuentra en el recinto ferial del Estado de North Carolina. Construido en 1952, fue el

primero que utilizó una cubierta de cables permanente libre de todo apoyo intermedio, que permite ver libremente la exposición de ganado a los asistentes (Brown, 2014). Destacan los dos grandes arcos parabólicos inclinados que trabajan principalmente en compresión frente a la cubierta traccionada y el cerramiento vertical, que arriostra todo el conjunto (Figura 3.36). Al morir Nowicki, el proyecto estructural fue confiado a la oficina del ingeniero Fred Severud. En principio estaba previsto cubrir con una membrana textil, pero en ese momento resultaba más económico utilizar chapa de acero plegada. Una importante preocupación para los ingenieros era la succión de viento sobre la superficie de cubierta, que solventaron tensando los cables transversales de la red. En 1954 se puso a prueba con la llegada del huracán Hazel, resistiendo vientos de velocidad máxima estimada en 100 millas por hora (Petroski, 2002).

Para dibujar los dos arcos parabólicos de hormigón, se puede trazar una parábola horizontal sobre la planta y extruir un cilindro con esta directriz, después se deberá cortar por un plano inclinado 68 grados desde la vertical o 22 desde la horizontal. La formación de los arcos como piezas de hormigón puede realizarse siguiendo el mismo procedimiento

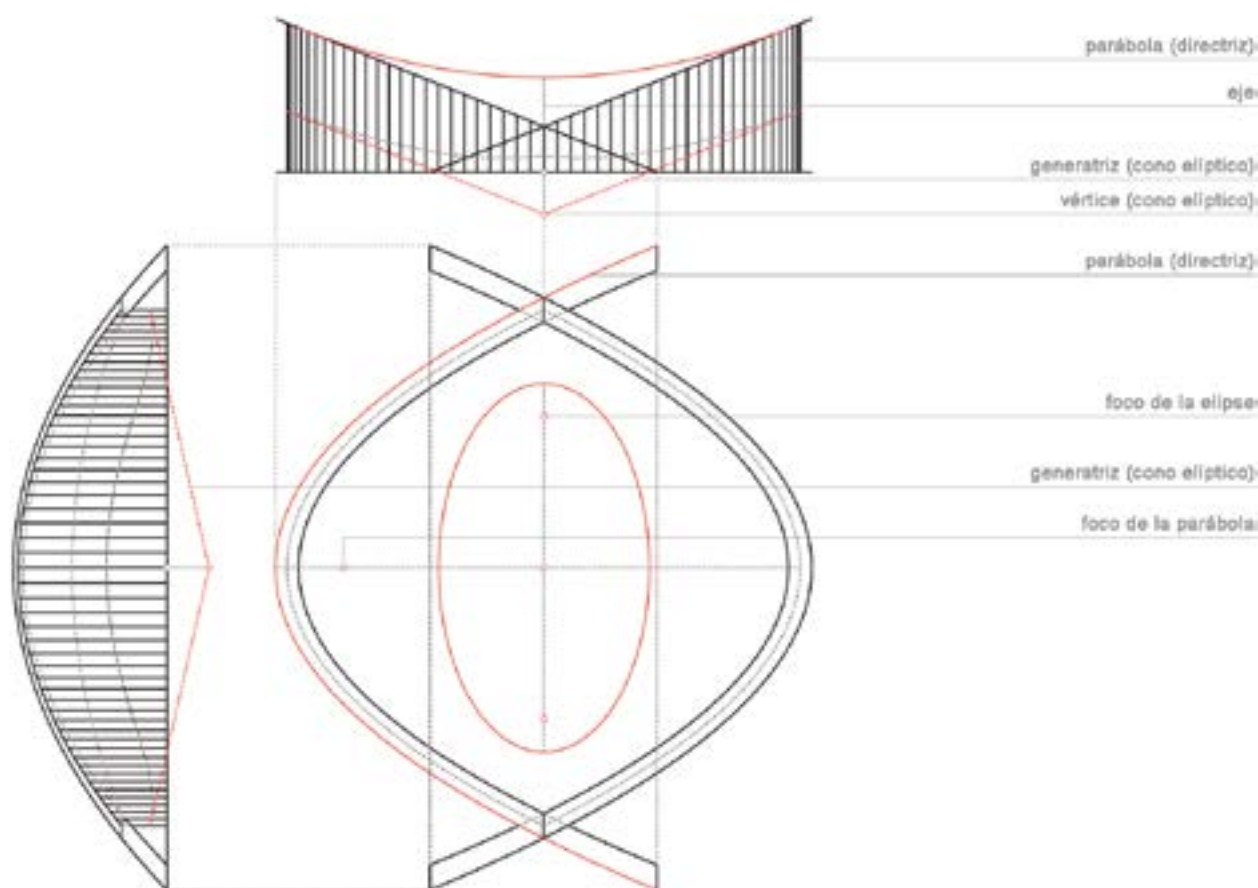


Figura 3.36. Esquema de alzados y planta del estadio Dorton Arena. Dibujo de los autores.

o desfasando la curva con el ancho de la pieza de hormigón para después formar una superficie y finalmente extruir como sólido la misma en el grosor adecuado.

La cubierta tiene perfil parabólico en la dirección que une los puntos más altos de los arcos, dibujando esta parábola que mira hacia abajo. Para construir esta superficie hay que tener en cuenta tres curvas: la parábola citada central (colgada) y los bordes interiores de los arcos parabólicos. Se toma la parábola central y se traza un barrido por dos carriles que serían las otras dos parábolas. La red de cables de acero que forma la cubierta conecta y equilibra los grandes arcos cruzados. Forma una superficie de doble curvatura, y los cables principales siguen una trayectoria parabólica, aunque no es un paraboloide hiperbólico. Por ello, para representar los cables es necesario dibujar líneas horizontales paralelas, separadas la distancia entre cables, aproximadamente 1,83 metros (unos 6 pies), para después proyectarlas sobre la superficie.

Otra característica interesante del diseño de este edificio es que la arena es una elipse. Esta curva es fácil de trazar. Desde ella suben las gradas en una

pendiente constante, formando un cono cuyo vértice queda bajo la cota del suelo. La intersección de ese cono y el cilindro parabólico de las fachadas describe una curva de cuarto grado, que se hace visible al exterior gracias a la transparencia de la estructura de barras verticales perimetral (Figura 3.37).

Una opción de aproximar curvas planas que se ha implementado recientemente en el contexto arquitectónico es la forma en que es puesta en práctica precisamente en el Dorton Arena (Petrovic *et al.*, 2018). A la hora de llevar a cabo una representación de algunas de las curvas características que lo conforman se puede proceder como se indica a continuación, haciendo uso de simetrías y proyecciones. Así, supongamos que aproximamos en planta una de las parábolas de la cubierta mediante la función:

$$g(x) = -0,22x^2 + 5$$

para $-5,45 < x < 5,45$, en cierta escala. Una parametrización de la curva alabeada sería de la forma:

$$\alpha(t) = [t, g(t), mg(t)]$$

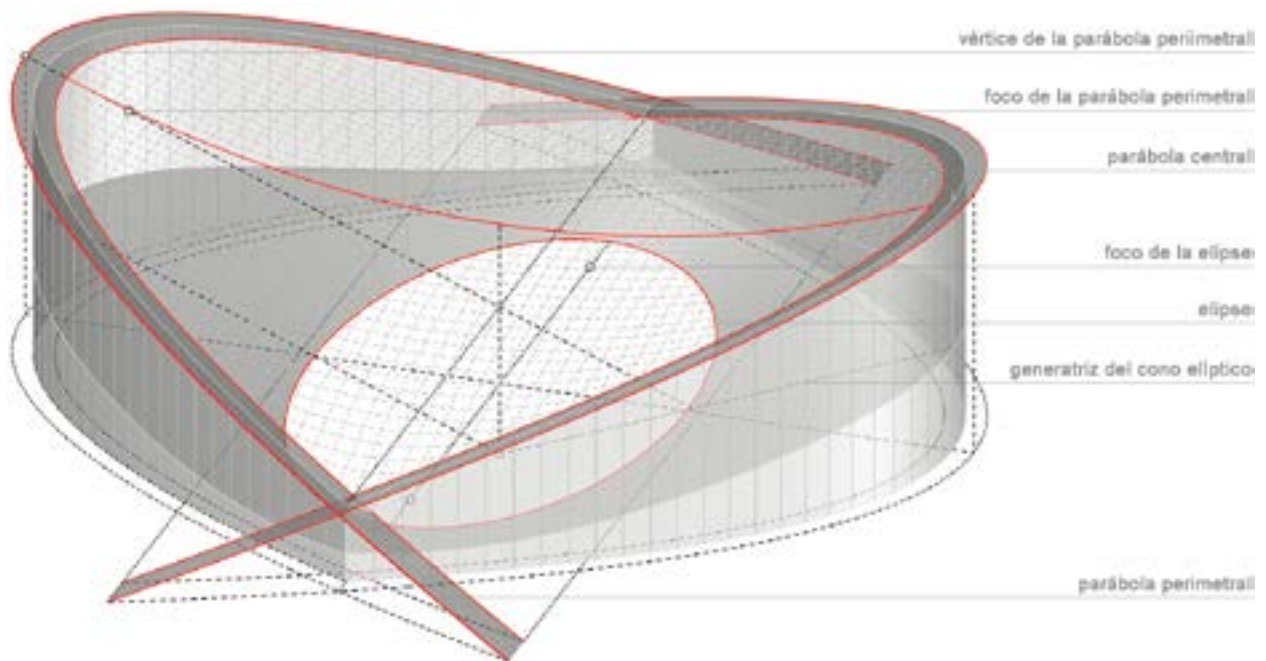


Figura 3.37. Modelo tridimensional del estadio Dorton Arena. Dibujo de los autores.

con $-5,45 < t < 5,45$, y donde permite modificar la altura elegida de la curva alabeada, de forma que su proyección en planta se mantiene invariante. Es claro que la curva simétrica quedaría parametrizada por:

$$\alpha(t) = [t, -g(t), mg(t)]$$

manteniendo el mismo rango de parámetros.

3.8. Heinz Hossdorf

Heinz Hossdorf (1925-2006) fue un ingeniero suizo de origen alemán, que estudió y desarrolló su profesión en Suiza y que vivió sus últimos veinte años en Madrid. En los años cincuenta sus ideas sobre pretensado y prefabricación llamaron la atención, entre otros, de Eduardo Torroja, que ya era uno de los más prestigiosos técnicos por su trabajo en arquitectura e ingeniería. Hossdorf fue conocido además por crear un laboratorio propio en el que desarrolló una metodología de ensayo de estructuras con modelos reducidos a escala y métodos de cálculo novedosos (Cassinello Plaza, Torroja, 2007). Realizó láminas en forma de bóveda de arista formada por paraboloides, como en la Biblioteca de Basilea, cubiertas de cáscaras curvas prefabricadas, unidas por cables postesados aéreos, como el almacén Wagen. También tesó cubiertas de madera, en un pabellón piramidal de trece metros de lado, en Basilea e incluso ligerísimas estructuras de poliéster reforzado

con fibra de vidrio, como en la exposición de Lausanne de 1964.

3.8.1. Nave industrial en Gossau

En 1954 los arquitectos Danzeisen y Voser solicitan el asesoramiento de Hossdorf para el proyecto de una nave industrial en Gossau (Suiza). La cubierta es una sucesión de cilindros de eje inclinado que salvan una luz de 30 metros (Cassinello, P., 2006). Entre las láminas de hormigón, de 6 cm de espesor, se disponen unas cerchas metálicas que conectan los bordes curvos de estas.

Al tratarse de cilindros inclinados, la proyección de su directriz en alzado debería ser una elipse, con su eje menor en la dirección vertical. Sin embargo, vemos que en alzado la curva proyectada es una circunferencia, por tanto, la directriz debe ser una elipse en su plano inclinado (Figura 3.38).

Una vez dibujada la elipse en su plano se hace una extrusión recta, creando el cilindro inclinado. Para limitar la cubierta al plano del suelo basta con recortar el cilindro a la altura correspondiente. Replicando esta entidad el número de veces necesario se completa el conjunto (Figura 3.39).

De esta obra podemos destacar la ecuación que describe un cilindro genérico en un sistema de referencia adecuado, mucho más simple, que queda transformada en otra ecuación tras los adecuados giros y traslaciones realizados para adecuarse a la

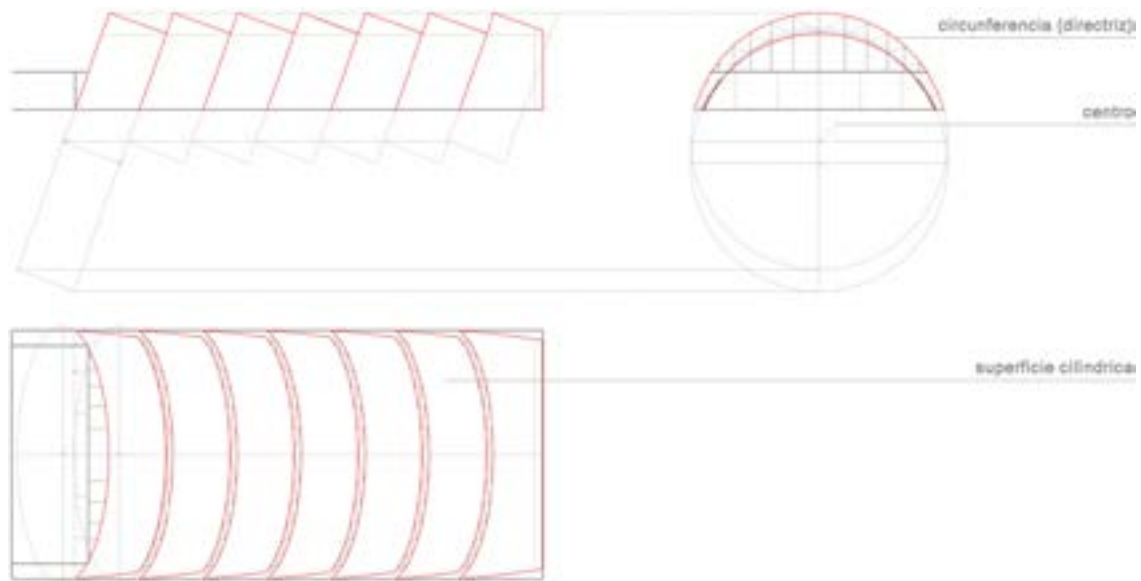


Figura 3.38. Esquema de planta y alzados de Nave industrial en Gossau, Heinz Hossdorf, 1956. Se puede apreciar que la superficie es un cilindro recto, con directriz en un plano inclinado. Dibujo de los autores.

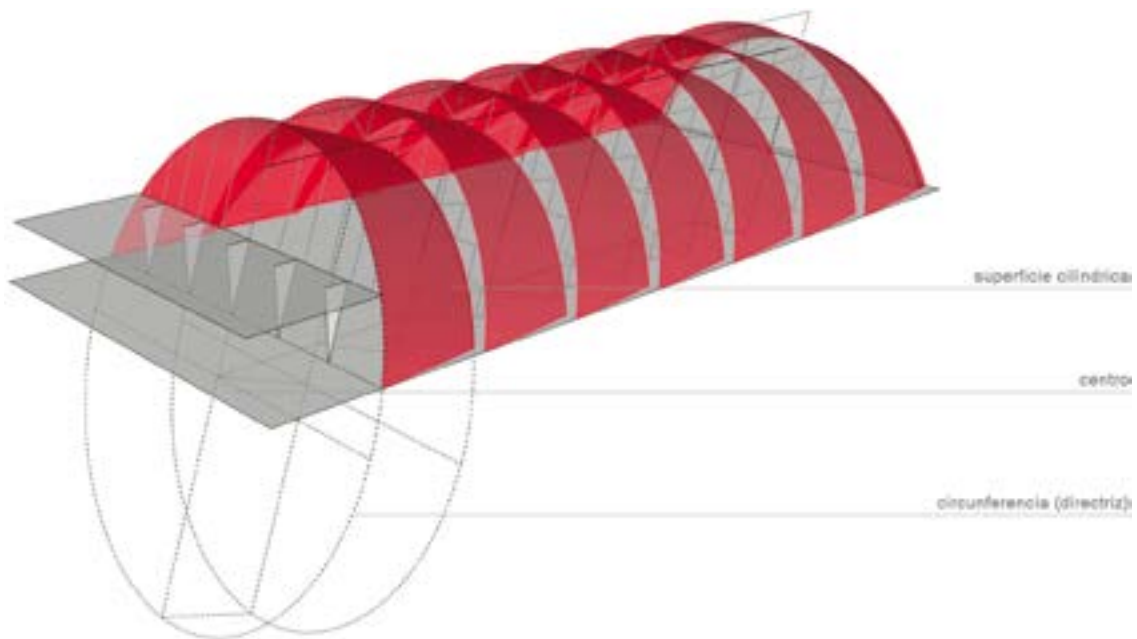


Figura 3.39. Esquema en perspectiva de la nave industrial en Gossau, Heinz Hossdorf, 1956. La cubierta deja entrar la luz entre sus hojas gracias a la inclinación de los cilindros. Dibujo de los autores.

realidad. Así, la ecuación implícita de un cilindro recto, de directriz dada por una circunferencia de radio viene descrito por la parametrización:

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [R \cos(t), R \sin(t), s]$$

variando los parámetros en $0 < t \leq 2\pi$ y siendo $0 \leq s \leq H$, donde H es la altura de uno de los cilindros. La rotación de ángulo φ respecto al eje OX consistirá en multiplicar las anteriores coordenadas

por la matriz identidad de orden 3 en la que la submatriz formada por las filas y columnas en la segunda y tercera posiciones se sustituyen por la matriz de rotación de ángulo φ , obteniendo la parametrización del cilindro girado

$$[x(t, s), y(t, s), z(t, s)] = [R \cos(t), \cos(\varphi)R \sin(t) - \sin(\varphi)s, \sin(\varphi)R \sin(t) + \cos(\varphi)s]$$

con el mismo rango de los parámetros (Figura 3.40).

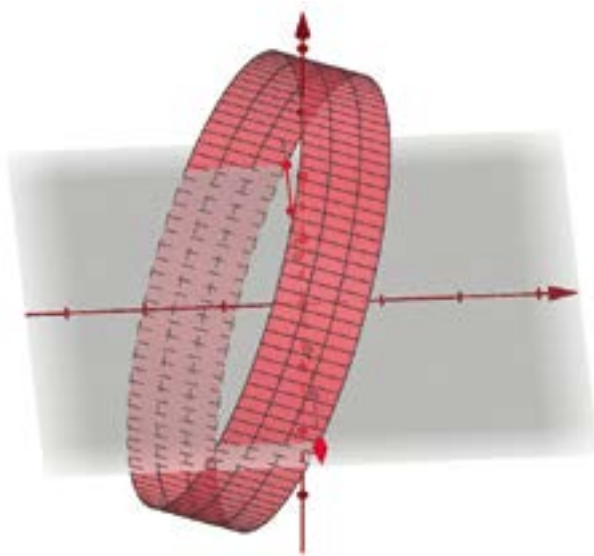


Figura 3.40. Modelado mediante Geogebra de la geometría de uno de los cilindros de la nave industrial en Gossau, Heinz Hossdorf. Dibujo de los autores.

3.9. Eladio Dieste

Eladio Dieste (1917-2000) fue un ingeniero uruguayo reconocido fundamentalmente por el uso estructural de la cerámica armada. Entre 1945 y 1975 desarrolló un conjunto extraordinario de obras singulares. Utilizando casi exclusivamente ladrillos, mortero y acero consiguió realizar cáscaras finas, en las que la geometría es a la vez una herramienta estructural y dinamizadora de sus formas. Puestos en obra sobre una cimbra, como si se tratara de hormigón armado, coloca los ladrillos con los alambres en las juntas, generando una malla en continuidad de alambres que absorben las tracciones de la lámina. El de Dieste es un caso inusual de en el campo de la construcción, pues se trata de un autor capaz de introducir innovaciones técnicas aplicadas a los materiales tradicionales y poner la ciencia al servicio de las necesidades sociales y medioambientales (Cabeza-Lainez *et al.*, 2009).

Destaca el uso de superficies de fábrica armada regladas, plegadas, bóvedas cilíndricas y las famosas «bóvedas gausas», denominadas así por Dieste en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss por sus avances en el cálculo matemático de curvas y superficies. Estas últimas superficies están formadas por la combinación de curvas catenarias y sinusoides, y aportan ventajas estructurales para cubrir grandes luces. Este tipo de láminas ya fue utilizado por el modernismo catalán a principios del siglo xx, y que el ingeniero uruguayo recupera y per-

fecciona (Dieste, 1961; De Dios de la Hoz, Clemente, 1998; Brufau, 1999).

3.9.1. Iglesia de Atlántida

Uno de sus proyectos más importantes es la iglesia de Cristo Obrero y Nuestra Señora de Lourdes (1952-1960), también conocida como Iglesia de Atlántida por su proximidad al municipio del mismo nombre. El ladrillo es el material de construcción fundamental. Tanto los muros como las cubiertas están íntegramente realizadas con lo que su autor denomina *cerámica estructural*, que es el resultado de combinar las hiladas de ladrillo con finas barras de acero que se introducen en las juntas.

La nave es un rectángulo de 16×33 metros de planta. El conjunto «...se concibió como una gran cáscara de doble curvatura que apoya en el terreno mediante una fundación *in situ* de 15 cm de diámetro y 5 de profundidad» (Dieste, 1961). Los muros, de 30 centímetros de espesor, se levantan inclinados creando una superficie reglada. Un conoide que une una recta, a la cota cero, con una curva senoide que discurre por la coronación. El replanteo se realizó con alambres de acero fijados a sendas directrices. Se compone de dos hojas de ladrillo separadas por una cámara que se rellenó de mortero hidrófugo. La pared acaba en un alero mixto de ladrillo y hormigón que une la parte superior del conoide con la bóveda.

La bóveda de la cubierta, de 11 centímetros de espesor, está formada por una primera capa de *tejuelas* (ladrillo de 3 cm de espesor), la siguiente capa de *ticholos* (ladrillo hueco), una capa fina de mortero, impermeabilización y una capa final de tejuela. La luz media es de 16 m y la flecha máxima de 147 cm. Las zonas valle de la onda son casi horizontales, y es ahí donde se alojan los tensores que resisten el empuje horizontal de las cáscaras.

La superficie de cubierta se define mediante las ondas sinusoidales laterales, trazadas en horizontal, con la sinusoidal vertical que recorre longitudinalmente la nave por su centro, uniéndolas a través de arcos catenarios transversales (Figura 3.41). Esta superficie se puede definir como combinación o red de curvas en dos direcciones, cuya geometría se consigue gracias a la adaptabilidad de las pequeñas piezas cerámicas y las tolerancias adoptadas en las juntas de mortero.

El resultado es un conjunto de superficies cerámicas que se equilibran mutuamente. Las láminas quedan atadas en sus bordes y las curvaturas rigidi-

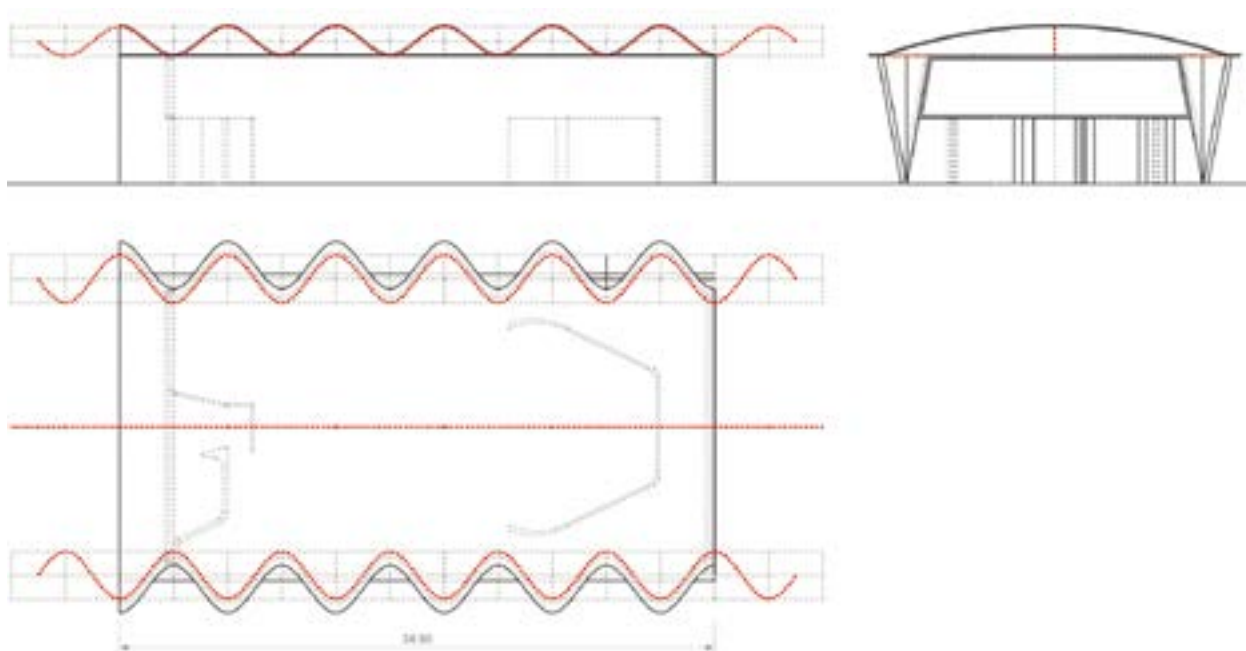


Figura 3.41. Esquema de alzados y planta, iglesia del Cristo Obrero, Eladio Dieste, 1960. Las curvas sinusoides se apoyan en los bordes superiores de los muros laterales y se levanta en el plano central de la nave. Es un proyecto que propone un prisma recto sobre el que se realizan unas operaciones de dinamización de sus planos, convirtiéndolos en superficies curvas. Dibujo de los autores.

zan las superficies. El cálculo analítico, imposible para la época, se aproxima, intuitivamente, a unas bóvedas en dos zonas: una que trabaja como bóveda gausa, apoyada contra la carrera de coronamiento, y otra zona, que es la de menor curvatura, que prácticamente cuelga de la anterior (Dieste, 1961).

Para representar el conjunto se parte de un prisma recto y sobre los bordes de la cubierta y la espina central se dibujan sendas curvas sinusoidales, las primeras en el plano horizontal y la tercera en vertical en el centro de la nave (Figura 3.42). Los muros laterales son el resultado de trazar una su-

perficie de transición entre la recta de arranque y la curva de coronación. Es una superficie reglada. La cubierta es una red de curvas que une todas las curvas de borde, dos sinusoidales, una recta en el borde posterior, la curva frontal (catenaria), más la central. La viga de borde, también ondulada, se dibuja aparte, copiando el senoide lateral a la distancia adecuada y formando una superficie plana con esa forma. Esta tiene una gran importancia estructural, pues facilita la colaboración de la bóveda con los muros laterales y confiere una gran rigidez al conjunto (Figura 3.43).

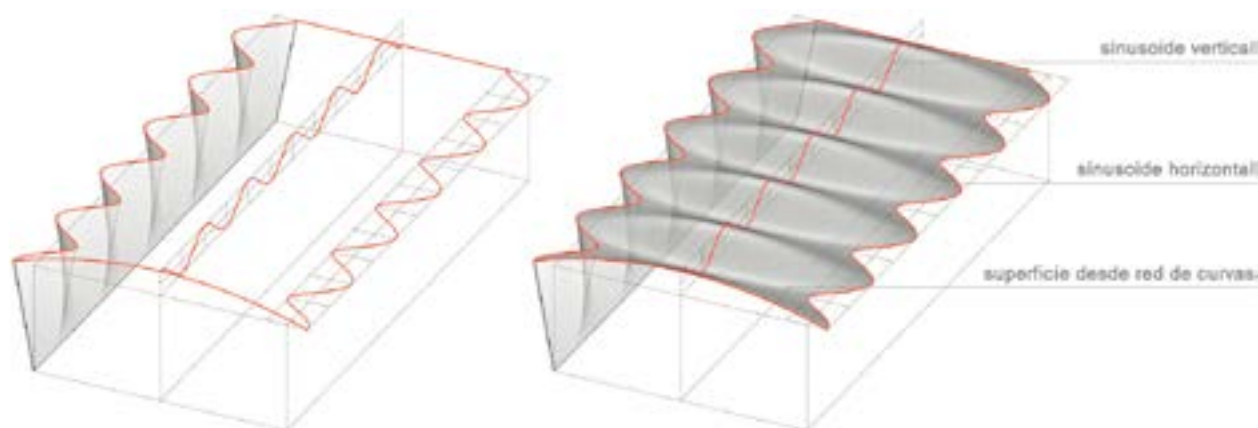


Figura 3.42. Esquema en perspectiva, iglesia del Cristo Obrero, Eladio Dieste, 1960. Sobre el paralelepípedo se construyen las superficies de los muros y a cubierta. Dibujo de los autores.

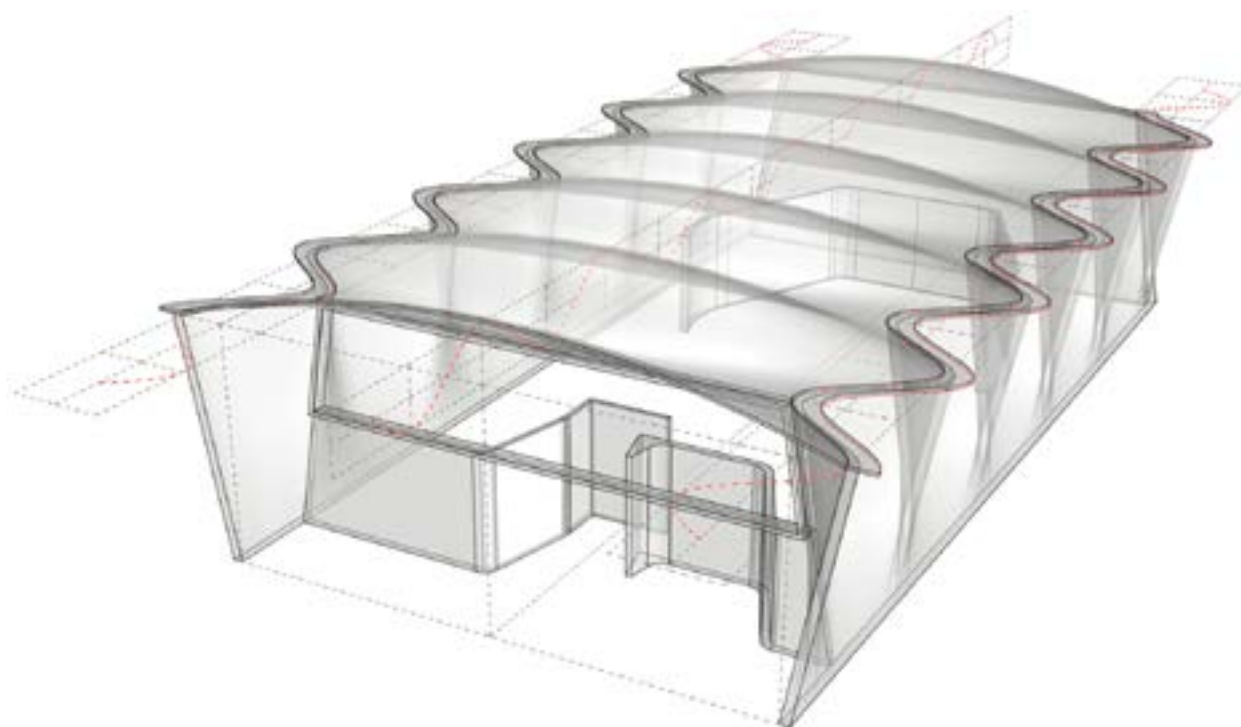


Figura 3.43. Modelo 3D, iglesia del Cristo Obrero, Eladio Dieste, 1960. Dibujo de los autores.

La técnica matemática propuesta en esta obra es la interpolación polinómica. Centramos nuestro interés en varios aspectos:

- Se hará un estudio de la parametrización del techo de la iglesia del Cristo Obrero, de Eladio Dieste a partir de los elementos encontrados desde la expresión gráfica, de forma geométrica.
- Se aproximarán ciertas curvas en este techo mediante polinomios, lo que llevará a explicar, de forma somera, la teoría de aproximación de curvas mediante polinomios, a través del polinomio de Lagrange.

En cuanto al primer apartado, se explicará la técnica utilizada para dar una parametrización de la superficie que conforma el techo de la iglesia del Cristo Obrero, de Eladio Dieste. Para ello, haremos uso del programa Geogebra de forma que las curvas que dan lugar a su estructura queden fijadas, y, más tarde, haremos uso de la herramienta Maple para dibujar la superficie mediante puntos. Esta técnica se acerca a la propuesta realizada desde la Expresión Gráfica Arquitectónica, reescrita en términos matemáticos.

En cuanto al segundo apartado, el uso de polinomios para aproximar curvas es, desde hace siglos, muy recurrido en matemáticas. En particular,

se recurrirá a la teoría del polinomio interpolador de Lagrange. Existen otras maneras de obtener un polinomio interpolador de forma más eficiente como la técnica del polinomio interpolador de Newton. El resultado obtenido mediante ambos procedimientos es el mismo polinomio. Sin embargo, la técnica del polinomio de Newton permite modificar el problema, añadiendo un número mayor de puntos a interpolar. En cualquier caso, esta ventaja no será relevante en nuestro problema, por lo que utilizaremos la técnica del polinomio interpolador de Lagrange. Para más información acerca de la interpolación polinomial, hacemos referencia a Sanz-Serna (1998).

La interpolación polinomial consiste en sustituir una curva (resp. una malla de puntos) por un polinomio de menor grado posible, de forma que el polinomio obtenido pase por ciertos puntos de la curva (resp. por los puntos de la malla). El teorema de aproximación de Weierstrass afirma que, si la función de la que partimos está definida en un intervalo cerrado y acotado, entonces el proceso de interpolación en una cantidad creciente de puntos permitiría obtener polinomios tan cercanos a la función de partida como fuera necesario. Este resultado no es cierto cuando alguna de la hipótesis provista no se cumple.

Por ejemplo, la función $f(x) = e^x - 1$, queda aproximada por polinomios interpoladores de gra-

do creciente $y = 0$, $y = (e - 1)x$, $y = \frac{(e - 1)^2}{2}x^2 + \frac{-e^2 + 4e - 3}{2}x$. Véase en la Figura 3.44 (izquierda) la función y los tres primeros polinomios interpoladores que la aproximan en $(0, 0)$, en $\{(0, 0), (1, -1)\}$ y en $\{(0, 0), (1, e - 1), (2, e^2 - 1)\}$.

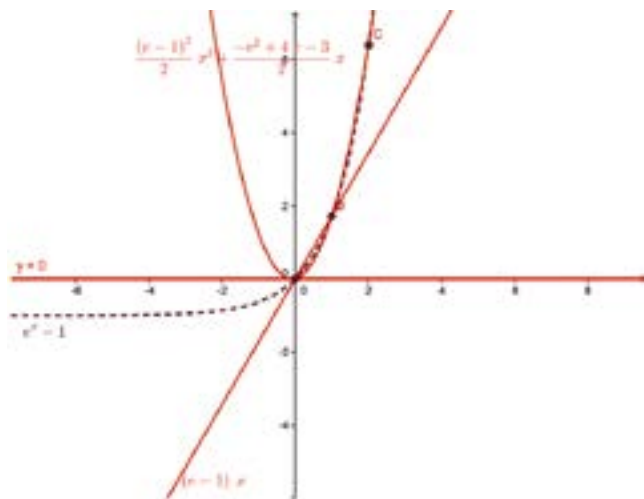
El polinomio de Lagrange no es otro que el polinomio utilizado para aproximar en este caso la función de partida en ciertos puntos. Su construcción se basa en la de las llamadas *bases polinómicas de Lagrange*, que son polinomios que se anulan en todos los puntos tomados para hacer la interpolación, salvo en uno de ellos cuyo valor es 1.

¿Cómo obtenemos dichos polinomios? Para explicar esta construcción, comenzamos por dos puntos. Supongamos que queremos construir un polinomio de la base de Lagrange de forma que tome valor 1 en la abscisa $x = x_0$ y que se anule en la abscisa $x = x_1$, ambas distintas. Obsérvese que el polinomio

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$$

soluciona el problema. ¿Qué ocurre si partimos de las abscisas $x_0, x_1, \dots, x_n$, todas ellas diferentes entre sí? El polinomio de menor grado que se anula en todos salvo en x_i para un cierto $i = 0, \dots, n$ y que vale 1 en x_i es:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$



No es difícil comprobar que L_i es un polinomio de grado $n + 1$ que se anula en todas las abscisas salvo en x_i que toma el valor 1. Estos polinomios en la base de Lagrange nos permitirán construir el polinomio interpolador que buscamos. Debemos tener en cuenta que nuestra búsqueda tiene como fin la obtención de un polinomio que cumpla:

$$p(x_0) = f(x_0) \quad p(x_1) = f(x_1) \quad \dots \quad p(x_n) = f(x_n)$$

El polinomio interpolador de Lagrange será, por tanto:

$$p(x) = f(x_0)T_0(x) + f(x_1)T_1(x) + \dots + f(x_n)T_n(x)$$

Es claro que $p(x)$ es un polinomio, ya que se ha construido sumando polinomios. Además, las propiedades de los polinomios de la base de Lagrange nos permiten concluir que se cumplen las condiciones requeridas.

Ejemplo:

Vamos a calcular el polinomio interpolador para la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ en los puntos de abscisas $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Se tiene que los polinomios de la base de Lagrange son:

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L_1(x) = \frac{x(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)} = (x^2 - 2x)$$

$$L_2(x) = \frac{x(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

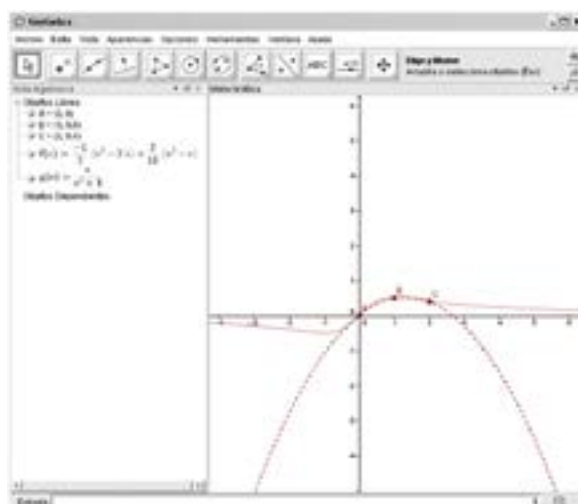


Figura 3.44. Izquierda: varios polinomios interpoladores. Derecha: varios polinomios interpoladores (Geogebra).
Dibujo de los autores.

respectivamente. De aquí se concluye que el polinomio interpolador de Lagrange es:

$$p(x) = f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x)$$

Una simplificación de la anterior expresión permite deducir que:

$$p(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + \frac{2}{10}(x^2 - x)$$

Un dibujo del resultado es el que se muestra en la Figura 3.44 (derecha). Obsérvese que el polinomio se empieza a ajustar a la función cerca de los puntos elegidos, pero no cuando nos alejamos de ellos.

Parametrización: una vez que hemos introducido los elementos teóricos que se utilizarán en el proceso de la parametrización de la obra arquitectónica elegida, nos disponemos a parametrizar el techo de la iglesia del Cristo Obrero, de Eladio Dieste.

En primer lugar, nos fijamos en las curvas laterales. Estas tienen formas sinusoidales, por lo que intentaremos encontrar funciones que se ajusten a sus formas. Para ello, hacemos uso del programa Geogebra. Creemos necesario indicar que las medidas siguen una cierta escala, pues han sido obtenidas a partir de los planos del edificio.

Insertamos como fondo de la vista gráfica una imagen con la planta del edificio (Figura 3.45). A continuación, creamos un par de deslizadores que permitan modificar la amplitud y periodo de una función, que utilizamos como base. Así, la función $f(x) = \cos(x)$ se modifica con dos deslizadores, y de forma que Geogebra dibuja la función

$$f(x) = a \cos(bx).$$

Los parámetros que se ajustan a nuestro modelo son $a = 0,45$ y $b = 3,2$. Para la segunda curva, consideramos una función $g(x)$ obtenida a través de modificar adecuadamente los parámetros en la primera función. El signo de se cambia para que la función sea simétrica, y se traslada en $-5,3$ unidades. Así, la función que define la segunda curva en el techo vendrá definida por:

$$f(x) = -a \cos(bx) - 5,3.$$

La coordenada x fija la profundidad en la superficie. Los planos indican que ésta varía entre $-5,85$ y $4,88$. En la variable dibujamos en planta las dos funciones f y g . Ahora bien, para la variable z dibujamos un arco cuya forma depende de la profun-

didad a la que nos encontremos. Así, si nos encontramos a una profundidad x_0 , la variable varía entre los valores de $g(x)$ y $f(x)$. Y en altura, dibujamos un arco entre dichos valores. En principio, la construcción será situada a altura nula por comodidad en las operaciones, aunque no hay mucha dificultad en modificarla adecuadamente. Es aquí donde haremos uso del polinomio interpolador de Lagrange.

Nuestro objetivo es construir un polinomio que se ajuste a las siguientes especificaciones: en los extremos, debe tener altura 0 para que el techo se una con las paredes. Vamos a considerar una parábola, de forma que necesitamos un punto central, al que llamamos *pmedio*. *pmedio* se sitúa a media distancia entre los extremos, que vienen dados por $g(x)$ y $f(x)$. Por tanto:

$$pmedio = \frac{f(x) + g(x)}{2}.$$

En este punto buscamos un efecto como el que aparece en el techo del edificio. Se puede observar que, cuando la abscisa x es tal que $g(x)$ y $f(x)$ tienen distancia mínima, entonces la altura adoptada por el techo es nula, mientras que cuando la diferencia es máxima, la altura se puede (bajo cierta escala) medir a partir de los planos. Así, incluimos un término en la definición de la altura de forma que esta se anule cuando la distancia entre $g(x)$ y $f(x)$ es concreta. Resumiendo, construimos una parábola p que cumpla que $p[f(x)] = 0$, $p[g(x)] = 0$ y $p(pmedio) = A$, para una cierta cantidad positiva A adecuada para nuestra construcción.

El polinomio interpolador de Lagrange viene dado por:

$$p(x) = 0 \cdot L_0(x) + A \cdot L_1(x) + 0 \cdot L_2(x),$$

con lo que solo es necesario escribir $L_1(x)$.

Para dibujar los puntos obtenidos mediante este procedimiento hacemos uso de la herramienta Maple, mediante el código siguiente, que se ajusta al algoritmo explicado.

```
restart : with(plots) : puntos := NULL :
```

```
f := t -> 0,45 * cos(3,2*t) :
```

```
g := t -> -0,45 * cos(3,2 * t) - 5,3 :
```

```
for x from -5,84 by 0,1 to 4,88 do
```

```
  pmedio := (f(x) + g(x)) / 2;
```

```
  L1 := t -> ([t - g(x)] * [t - f(x)] /
```

```
    [pmedio - g(x)] * [pmedio - f(x)])
```

```
  for x from g(x) by 0,1 to f(x) do
```

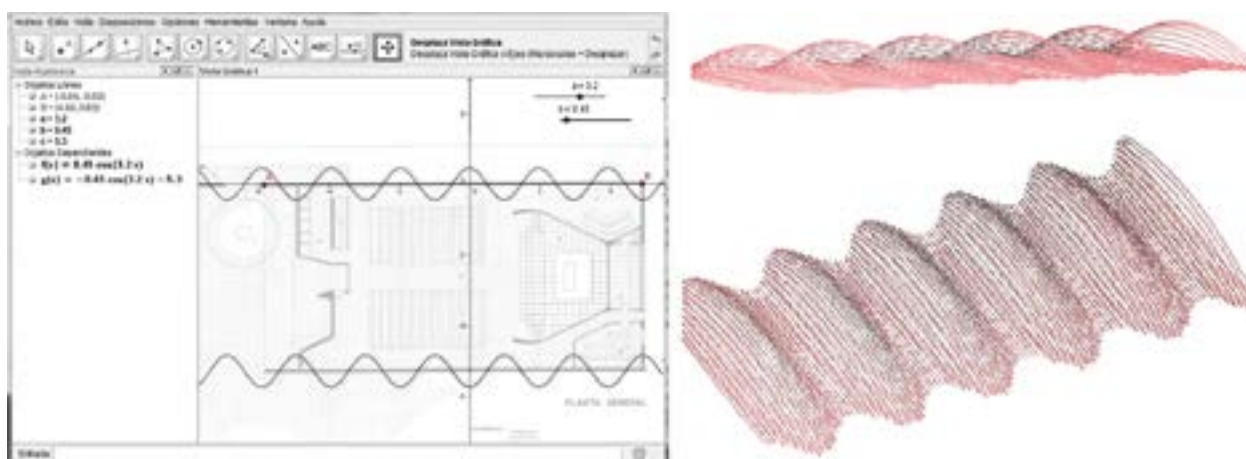


Figura 3.45. Izquierda: planta de la iglesia de Atlántida (Mas Guindal, Adell, 2005). Aproximación de la curva sinusoidal en la Iglesia del Cristo Obrero. Derecha: interpolación de la cubierta mediante parábolas. Por los autores.

```

z := evalf( $\frac{[f(0)] - g(0)] \cdot 0,23}{3,34}$  .
(|f(x) - g(x)| - (f(Pi) - g(Pi))) \cdot L1(y));
puntos := puntos, [x, y, z]
end do:
end do:

puntos := [puntos]:
pointplot3d (puntos, scaling = constrained, connect
= true);

```

El resultado se muestra en la Figura 3.45 (derecha).

3.10. Eero Saarinen

Eero Saarinen (1910-1961) fue un arquitecto y diseñador finlandés-estadounidense, hijo de Eliel Saarinen, también arquitecto y Louise Gesellius, escultora. Sus primeros éxitos le llegaron por sus diseños de muebles, como la silla Tulip, de 1940. Adquirió una imagen de modernidad y como colaborador de su padre realizó numerosos proyectos de corte racionalista para grandes corporaciones estadounidenses. En la década de los cincuenta le llegaron encargos de varias universidades, como la Universidad de Pensilvania, Yale, MIT o la Universidad de Chicago. Muchas de sus obras han adquirido un carácter icónico gracias a su definición geométrica.

3.10.1. Kresge Auditorium

El auditorio Kresge se construye en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) en 1955 en el cen-

tro de un espacio abierto, en el que se relaciona con la capilla, también diseñada por Saarinen como conjunto cívico para el campus. Aloja un auditorio para más de 1200 personas. La sala está libre de columnas que impidan la visión. La acústica se controla gracias a unas piezas absorbentes en forma de nube que cuelgan de la cubierta.

El espacio se cubre mediante un casquete esférico triangular, cuya estructura es una lámina fina de hormigón. La esfera que lo define tiene un radio de 34,29 metros y se limita con tres planos inclinados que forman noventa grados entre sí y que se encuentran en el centro de la esfera. Los muros perimetrales son cerramientos de vidrio que siguen la proyección horizontal de la cubierta (Figura 3.46).

La cáscara de hormigón varía desde los 9 centímetros de espesor en la clave a los trece en el centro de los bordes. Estos bordes se refuerzan con gruesos arcos de hormigón de cantos que van de los noventa a los cincuenta centímetros y ancho de 25. Esto significa que el comportamiento estructural es de una pura cáscara reforzada en sus arcos laterales.

La cubierta es un casquete esférico limitado por tres planos ortogonales que pasan por su centro, es decir es un octavo de la esfera (Figura 3.47). Para construir este modelo empezamos por realizar tres planos ortogonales, hallamos su intersección y situamos el centro de la esfera en el vértice común. A continuación, se corta la esfera por los planos y se eliminan las áreas sobrantes, dejando el casquete buscado. Para poner este en posición horizontal se puede dibujar el triángulo que une los vértices y a continuación girarlo u orientarlo hasta que coincida con el plano horizontal de proyección. Se comprueba que el giro es correcto si el eje que une el centro de la esfera con el centro del triángulo queda en posición vertical.

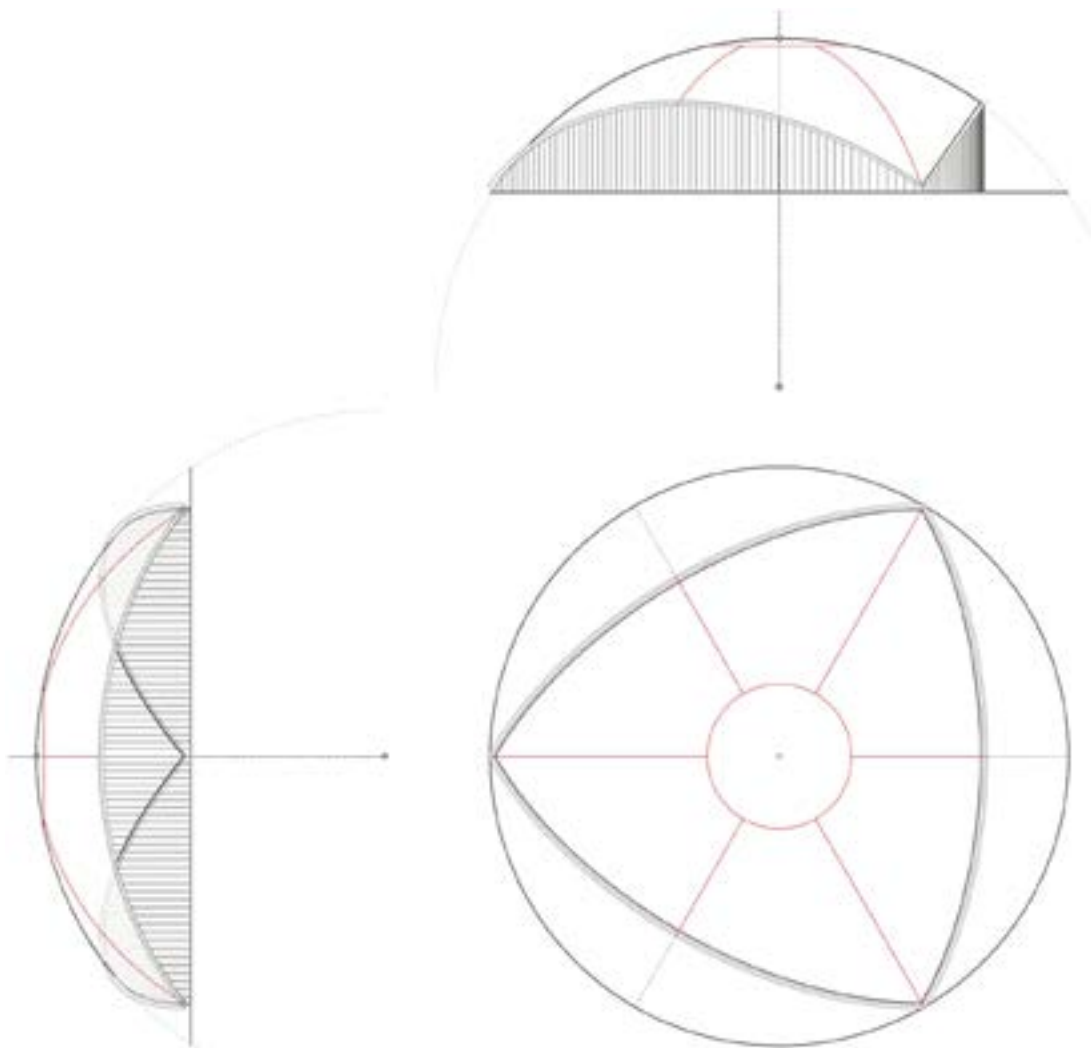


Figura 3.46. Esquema de planta y alzados del auditorio. Dibujo de los autores.

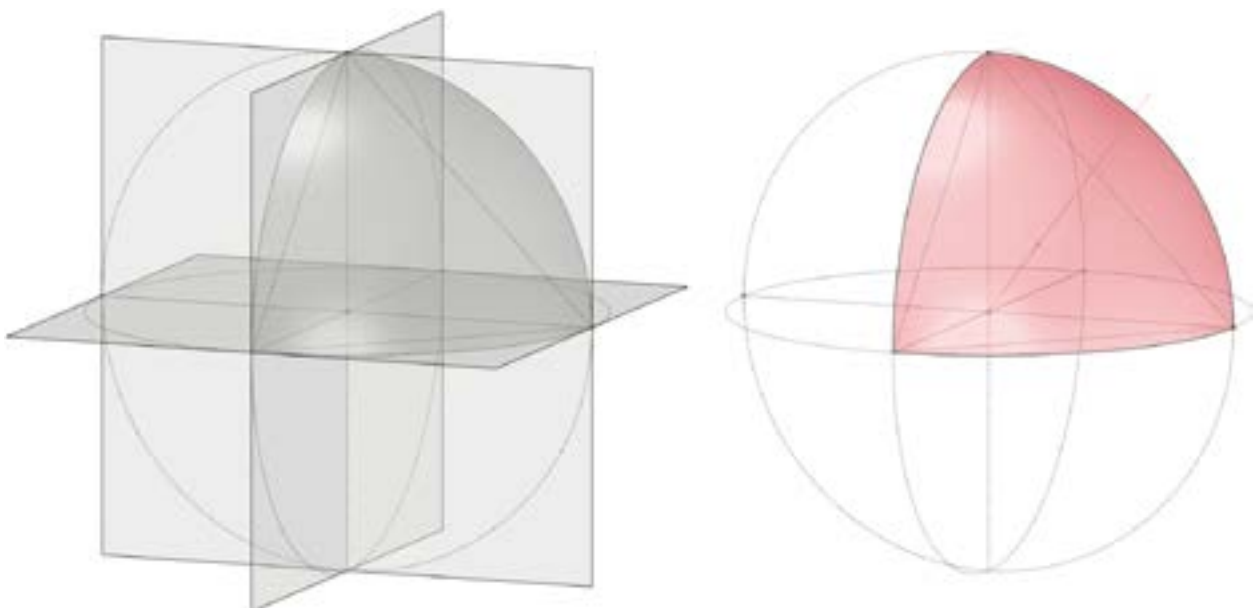


Figura 3.47. Corte de una esfera con tres planos ortogonales que pasan por su centro, obteniendo el casquete esférico de la cubierta del auditorio. Dibujo de los autores.

La base visible del edificio es un círculo horizontal situado un poco por debajo de los vértices del casquete, con el fin de formar los apoyos triangulares. Los bordes de la cáscara necesitan una rigidez extra y para ello extruimos las curvas externas formando unas superficies en forma de arco inclinado. Finalmente, se pueden dibujar los cerramientos extruyendo en vertical su planta. Esta se determina proyectando los bordes de la cubierta sobre el círcu-

lo de suelo. Los arcos de circunferencia del contorno serán arcos de elipse en proyección horizontal. Unos segmentos verticales representarán la carpintería dando escala al conjunto. Por último, trazamos en horizontal una circunferencia del radio correspondiente y seis ejes radiales. Todos ellos se proyectan sobre la superficie esférica para dibujar las divisiones del acabado metálico de la cubierta (Figura 3.48).

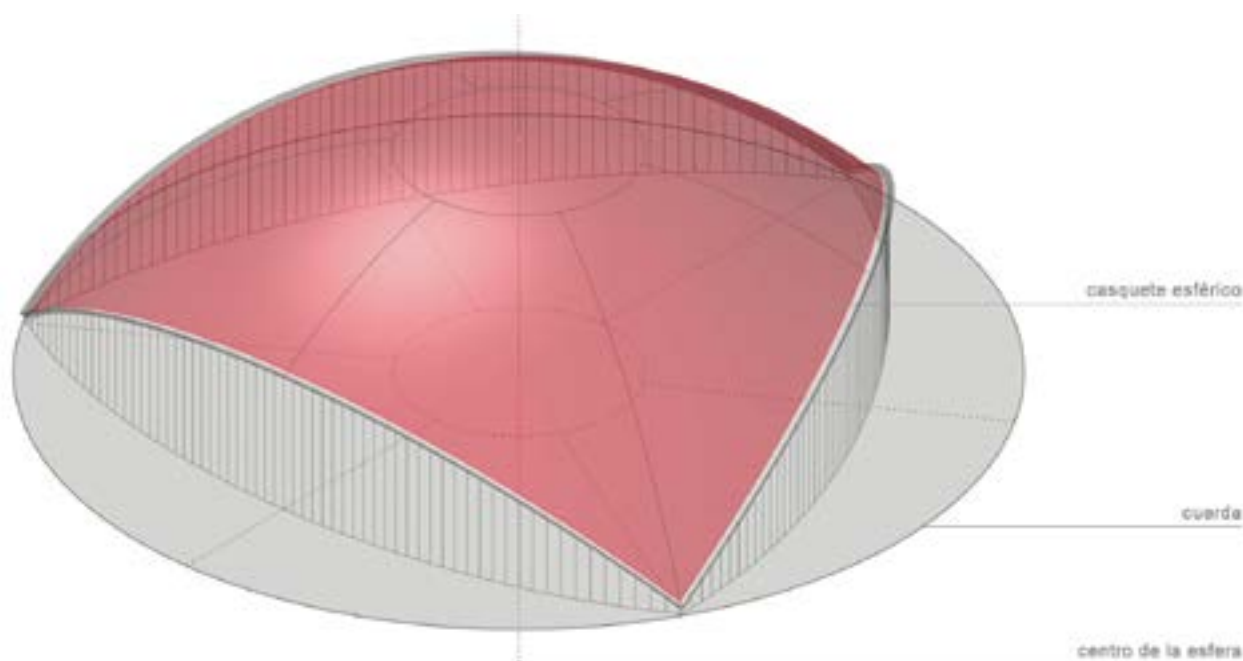


Figura 3.48. Modelo tridimensional del auditorio. Dibujo de los autores.

Desde el punto de vista matemático puede ser interesante realizar operaciones de corte sobre una esfera con distintos planos. Para poder situar inicialmente la cubierta sobre el plano del suelo, consideramos una esfera con centro hundido en altura, en el punto $(0,0, -0,58)$ y radio la unidad. A continuación, realizamos cortes transversales con planos paralelos a los planos $x + y + z = 0$, y su giro $2\pi/3$ y $4\pi/3$ respecto al eje oZ , es decir, los planos:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi/3)x + y \sin(2\pi/3) - \sin(2\pi/3)x + \\ + \cos(2\pi/3)y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(4\pi/3)x + y \sin(4\pi/3) - \sin(4\pi/3)x + \\ + \cos(4\pi/3)y + z = 0 \end{aligned}$$

Estos planos resultan de la multiplicación del vector de coordenadas por la correspondiente matriz de giro. Finalmente, la traslación de estos planos para que pasen por el centro de la esfera inicial

determina tres curvas que establecen los límites de la cubierta. Una vez conocidos los límites de la cubierta, podemos reutilizar una técnica previamente trabajada en este volumen consistente en construir la superficie reglada que une cada una de estas curvas de forma perpendicular con el plano de suelo. En definitiva, si $[x(t), y(t), z(t)]$ para $a < t < b$ es una parametrización de una de las curvas intersección de la esfera de centro $(0,0, -0,58)$ y radio la unidad con la traslación de los planos ortogonales, entonces la superficie que dibuja la correspondiente pared viene parametrizada por $[x(t), y(t), sz(t)]$ donde $a < t < b$ y $0 < s < 1$. El resultado de la construcción previa se muestra en la Figura 3.49, realizada mediante el *software* Geogebra.

3.10.2. Ingalls Rink

Otra obra destacada es el pabellón de patinaje Ingalls, en Yale, cuya cubierta está formada por una

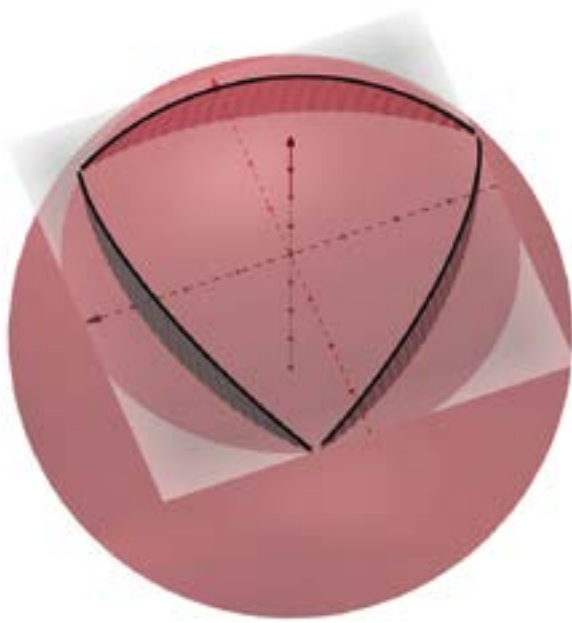


Figura 3.49. Representación del auditorio Kresge. Representación Geogebra. Dibujo de los autores.

superficie alabeada formada por cables en suspensión que cuelgan de un gran arco parabólico (Figura 3.50). Estos adoptan la forma de curvas catenarias,

habitual en este tipo de estructuras. En los laterales dos grandes muros curvos contrarrestan las tracciones de los cables a la vez que alojan las gradas. Las superficies colgantes se cubren con un acabado de cinc en su cara superior y de listones de madera por debajo. Ambos sistemas son maleables y se adaptan bien a sus formas sinuosas.

El arco de hormigón está formado por varias curvas tangentes. La parte central es una parábola que en los extremos se combina con una contracurva trazada por puntos. Este esquema se repite tanto en los bordes superior e inferior, como en la zona media, en la que se anclan los cables de cubierta. Para construirlo dibujaremos todos sus bordes, uniéndolos y formando una superficie con estas formas (Figura 3.51). A continuación, se puede extruir con el grosor correspondiente.

Las gradas se alojan en los muros perimetrales. Estos siguen una curva alabeada que resulta de hacer la intersección de un cilindro de directriz parabólica de eje horizontal y otro vertical. Para ello bastará con dibujar en ambas proyecciones sus formas curvas compuestas y extruirlas en la dirección perpendicular. La curva intersección no será plana, sino cuártica.

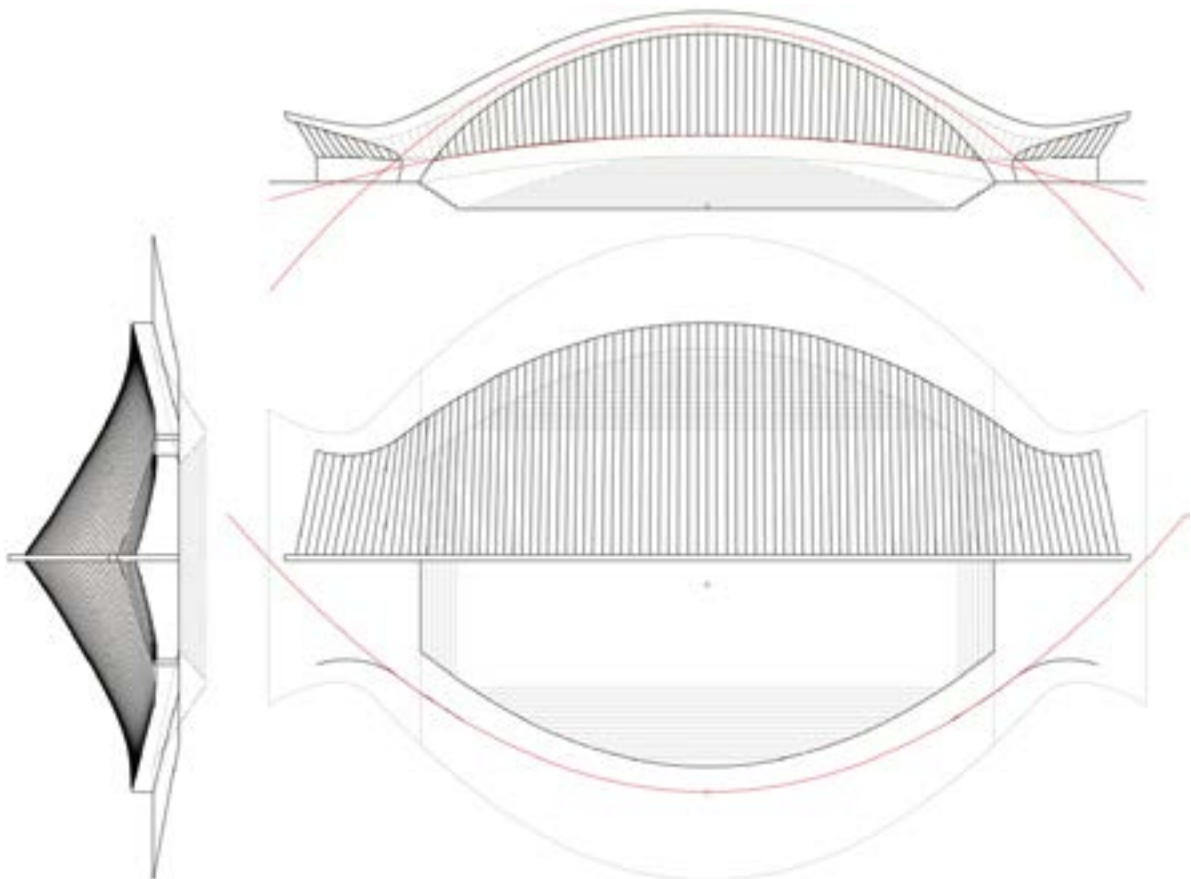


Figura 3.50. Esquema de planta y alzados del pabellón. Dibujo de los autores.

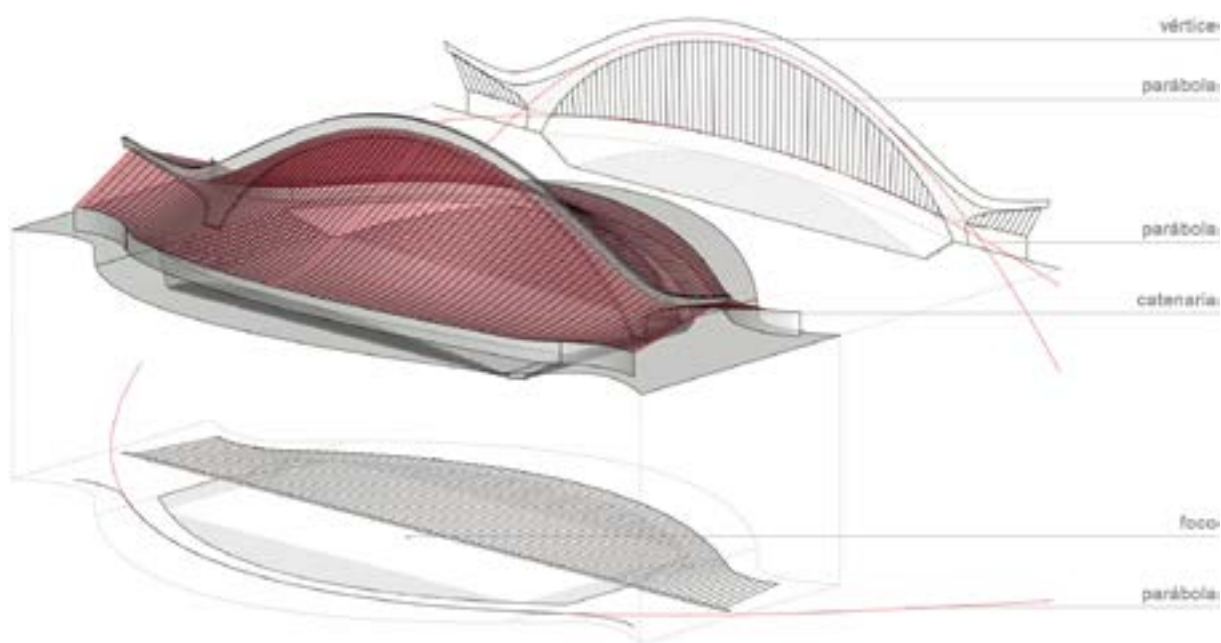


Figura 3.51. Modelo tridimensional del pabellón. Dibujo de los autores.

Para realizar las superficies alabeadas de las cubiertas tomaremos el cable central. Dibujaremos una curva media en un plano vertical perpendicular al arco, apoyada en este y en la curva superior de las gradas. Para aproximar el cable a una catenaria se comienza por trazar una recta que una los extremos, se dividirá en tres partes, sobre el tercio inferior se hará un segmento descendiendo aproximadamente el 8% de la luz, para finalmente dibujar una curva por tres puntos, en la que el punto intermedio sea el descendido. En los bordes se puede seguir el mismo método o trazarlos rectos por su poca longitud. Las cubiertas serán dibujadas como superficie desde red de curvas.

Desde la perspectiva matemática puede ser interesante, a la vista de lo anteriormente dicho sobre esta obra arquitectónica, considerar aproximaciones por curvas trigonométricas, tanto del cable central como de las curvas de los bordes. Es conocido que tal aproximación se adapta de forma muy precisa a curvas del tipo que se está modelando. Teniendo en cuenta la simetría par de las curvas, la aproximación trigonométrica puede realizarse como un polinomio en cosenos. Para simplificar dicha aproximación, ambas curvas se aproximarán por funciones de la forma $f(x) = a \cos(bx) + c$ y $g(x) = k \cos(lx) + m$ para valores adecuados de los parámetros a, b, c, k, l, m . Como se verá a continuación, la forma obtenida se aproxima en buena medida a la curva del edificio. Así, para los valores $a = 0,5$, $b = 0,96$ y $c = 1$ en el caso de la curva del cable central, y $k = -0,5$, $l = 1$ y $m = 2,2$ y para una de las curvas de los bordes se tiene que las curvas alabeadas

vienen determinadas por las parametrizaciones $[t, 0, f(t)]$ y $[0, t, g(t)]$ para $-m < t < m$, para una cierta constante positiva m . De esta forma, una de las superficies regladas se construye siguiendo la técnica que une ambas curvas alabeadas por segmentos, teniendo como parametrización la siguiente:

$$[st + (1-s)t, (1-s)g(t), st(t)],$$

$$-m < t < m, 0 < s < 1$$

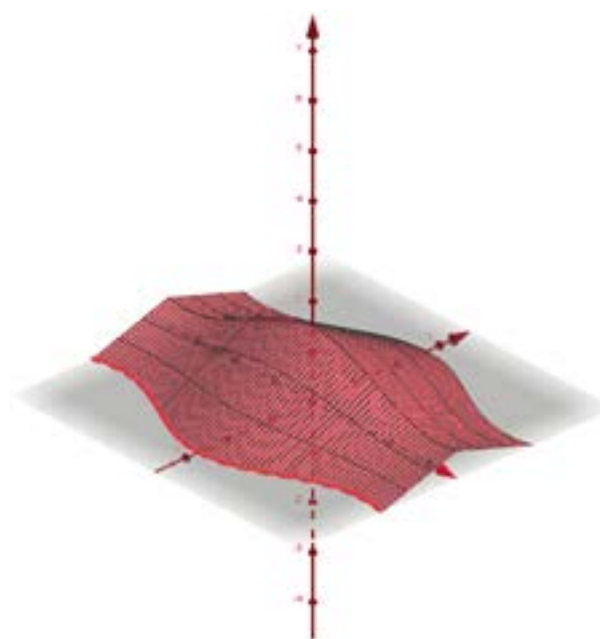


Figura 3.52. Representación de Ingalls Rink. Representación Geogebra. Dibujo de los autores.

La superficie simétrica respecto al plano $y = 0$, que actúa de espejo es simplemente la superficie parametrizada por:

$$[st + (1 - s)t, - (1 - s)g(t), st(t)], \\ -m < t < m, 0 < s < 1$$

El resultado de este procedimiento se ilustra en la Figura 3.52.

3.11. Norman Foster

Norman Foster (1935) es un arquitecto británico conocido por realizar una arquitectura de carácter tecnológico, que a menudo exhibe su estructura, tanto en el exterior como en el interior, y con cerramientos ligeros de vidrio y metal. No obstante, incorpora a sus proyectos mecanismos de ahorro energético basados en energías renovables, ventilación, recuperación de agua, etc. (De Leyva, 2010). Las formas utilizadas en sus obras son muy variadas, mezclando rectas y curvas. En varias ocasiones ha optado por superficies de revolución, como en el caso de la cúpula del Reichstag en Berlín o del rascacielos en 30 St Mary Axe o derivadas, como el City Hall de Londres.

3.11.1. Cúpula del Reichstag en Berlín

Tras la reunificación el Gobierno alemán se traslada de Bonn a Berlín y se plantea recuperar el antiguo parlamento situado en el centro histórico de la ciudad. El concurso internacional abierto para su renovación fue ganado por Norman Foster, que convirtió la cúpula en una linterna que introduce la luz natural en el espacio de la cámara. Los visitantes tienen la doble visión, la del panorama de la ciudad y la de la sala de representantes. En esta relación se ha querido ver una manifestación simbólica del pueblo por encima de los políticos (Davey, 1999).

La cúpula del Reichstag (1999) es un semi-elipsoide de vidrio y metal. En su interior se dispone un recorrido de subida hasta el mirador superior, por medio de una rampa helicoidal, que llega hasta la plataforma superior y otra de bajada, igual a la anterior, pero girada 180 grados sobre la planta (Figura 3.53).

El programa de CAD facilita la hélice cónica. Por tanto, podemos abordar la construcción por tramos de la rampa. Se dibuja la hélice y una sección transversal de la rampa o un simple segmento, que

sirva como generatriz. Por último, se hace una revolución por carril. La estructura de la cúpula se realiza de manera similar, dibujando la elipse que servirá como directriz y una sección de los meridianos. Se realiza un barrido por carril de la sección tomando como carril el tramo de elipse que se necesite. A continuación, se dibujan en su plano las secciones de los paralelos y se generan en 3D por revolución sobre el eje central (Figura 3.54).

La técnica: coordenadas cilíndricas. Son varios los propósitos de este capítulo. Por un lado, queremos explicar y aplicar a un caso práctico el concepto de *sistema de coordenadas cilíndricas*, muy útil para determinar parametrizaciones adecuadas. Por otro lado, se quiere también dar una explicación más exhaustiva que la que se dio en la introducción acerca de las estructuras helicoidales (hélices y helicoides) a través de la estructura de doble hélice que aparece en el edificio del Reichstag alemán, en Berlín, de Foster y Partners. Además, será necesario comprender e interpretar cuándo una curva está contenida en una superficie.

En la introducción se ha mencionado que una parametrización de una hélice viene dada por $\alpha: R \rightarrow R^3$, siendo $\alpha(t) = [\cos(t), \sin(t), t]$, para cada $t \in R$. Teniendo en cuenta la función de cada una de las funciones que aparecen en la parametrización, no resulta difícil modificar ésta para obtener estructuras similares en las que ciertas propiedades deseadas se cumplan. Por ejemplo, si la velocidad de crecimiento en la tercera variable siguiera un crecimiento distinto, siguiendo una cierta función f , basta sustituir dicho crecimiento en la tercera componente de α . Por ejemplo, si $f(x) = x^3/100$, y la parametrización a estudiar es $\alpha(t) = [\cos(t), \sin(t), f(t)]$, la tasa de crecimiento de la hélice depende de la nueva función. Obsérvese en la Figura 3.55 (izquierda) cómo ha cambiado el crecimiento, mientras que la proyección sobre el suelo sigue siendo una circunferencia.

La función elegida es tal que crece muy despacio cuando la variable está cerca del origen, mientras que su crecimiento se hace mucho mayor a medida que nos alejamos de él. Otra forma de modificar la estructura de la hélice consiste en cambiar el radio de la circunferencia en planta a medida que se modifica el parámetro. Si queremos que el radio de giro se modifique siguiendo una función positiva g , emplearemos $\alpha(t) = [g(t), \cos(t), g(t) \sin(t)]$. Obsérvese que a medida que recorremos el parámetro, en planta se irá dibujando una trayectoria que gira en sentido contrario a las agujas del reloj, y tal que para cada valor t_0 , el punto en planta se encontrará

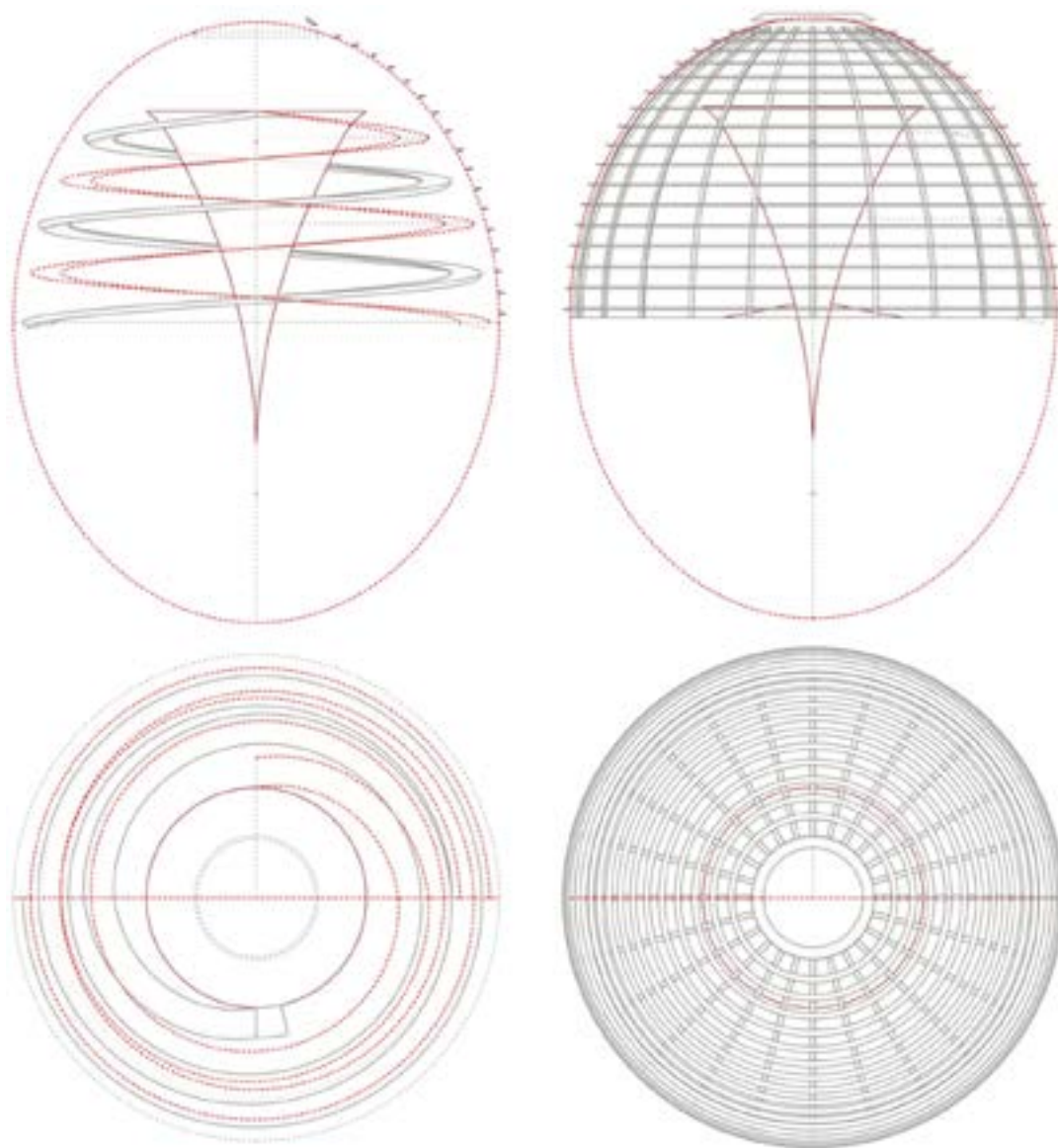


Figura 3.53. Esquema de planta y alzado de la Cúpula del Reichstag, Norman Foster, 1999. Hay dos rampas panorámicas, una de subida y otra de bajada al mirador superior. La hélice se adapta a la superficie, que es un elipsoide de revolución. Dibujo de los autores.

a distancia $g(t)$ del origen. Pongamos un par de ejemplos. Si elegimos g como la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x \in [0, 2\pi] \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces la hélice se dibuja obteniendo como resultado el mostrado en la Figura 3.55. También exponemos la vista en planta de la curva. En esta vista se observa con más claridad cómo el radio cambia, y tiene como valores o dependiendo de la altura a la que nos situamos.

Consideramos un segundo ejemplo la función $g(x) = \sin^2(x)$. Para esta elección, la hélice queda modificada según la Figura 3.56.

Para esta elección, en planta se puede ver una figura de «ocho». Este comportamiento es producto de haber parametrizado una lemniscata en las dos primeras componentes de la parametrización de la curva alabeada.

Supongamos ahora que nos gustaría construir una hélice que girara en sentido contrario, es decir, que vista en planta, la trayectoria descrita fuera una circunferencia que girara en el sentido de las agujas del reloj. Para ello basta tener en cuenta que el parámetro corresponde al ángulo de giro en planta de la curva helicoidal. Si queremos que el giro se realice en sentido contrario, basta con sustituir t por $-t$. A partir de las propiedades trigonométricas de seno y coseno mediante las cuales $\sin(t) = -\sin(-t)$ y

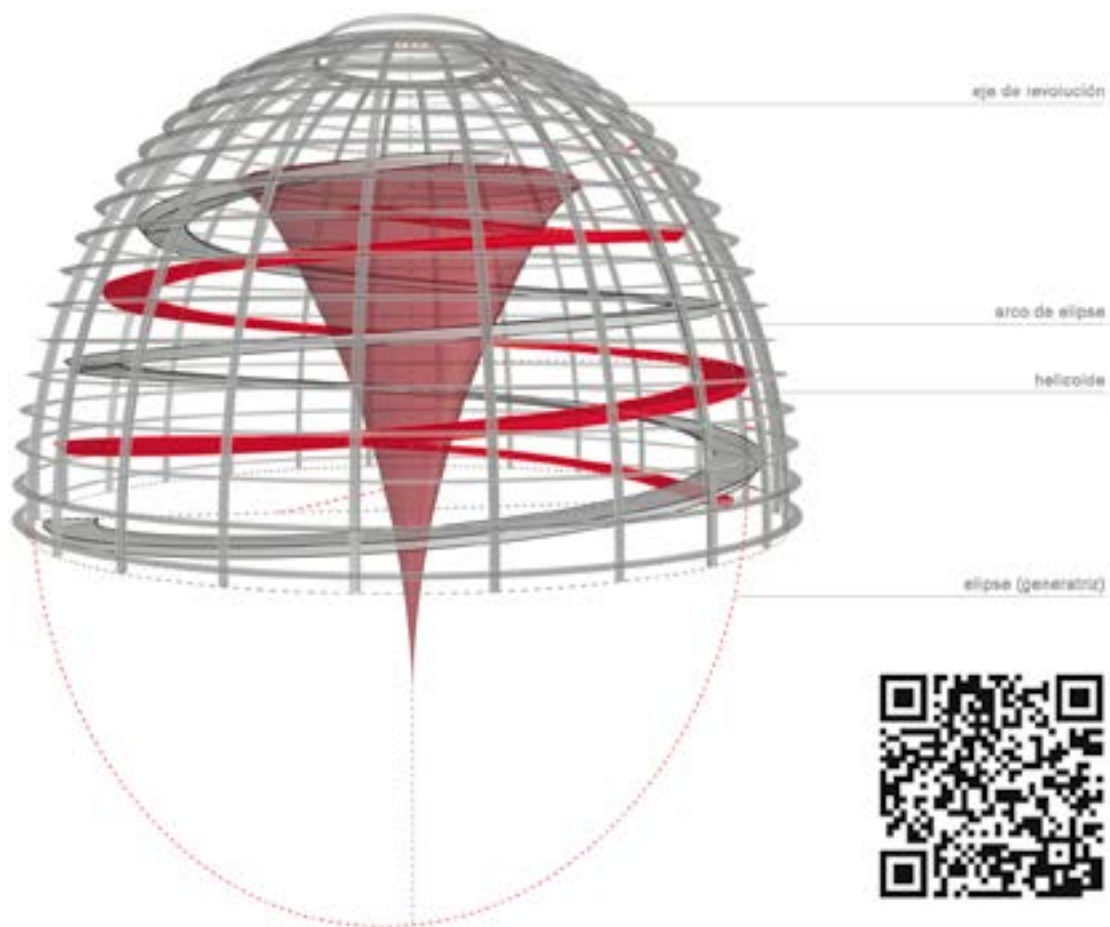


Figura 3.54. Esquema en perspectiva de la cúpula del Reichstag, Norman Foster, 1999. Se pueden apreciar las dos rampas idénticas, giradas 180 grados. En la esquina inferior derecha se muestra el código QR que da acceso a la animación de la cúpula del Reichstag realizada con Geogebra. Dibujo de los autores.

$\cos(t) = \cos(-t)$ deducimos que la parametrización correspondiente a la hélice girando en sentido opuesto en planta corresponde a $\alpha(t) = [\cos(t), -\sin(t)]$ (Figura 3.56).

¿Cómo podríamos modificar el parámetro para que la figura quedara girada en torno al eje

$x = y = 0$? Es decir, consideramos la recta que proyectada en planta corresponde al punto que es el centro de las circunferencias obtenidas al proyectar la hélice. Supongamos, por ejemplo, que queremos realizar un giro de 180° respecto a este eje en la construcción.

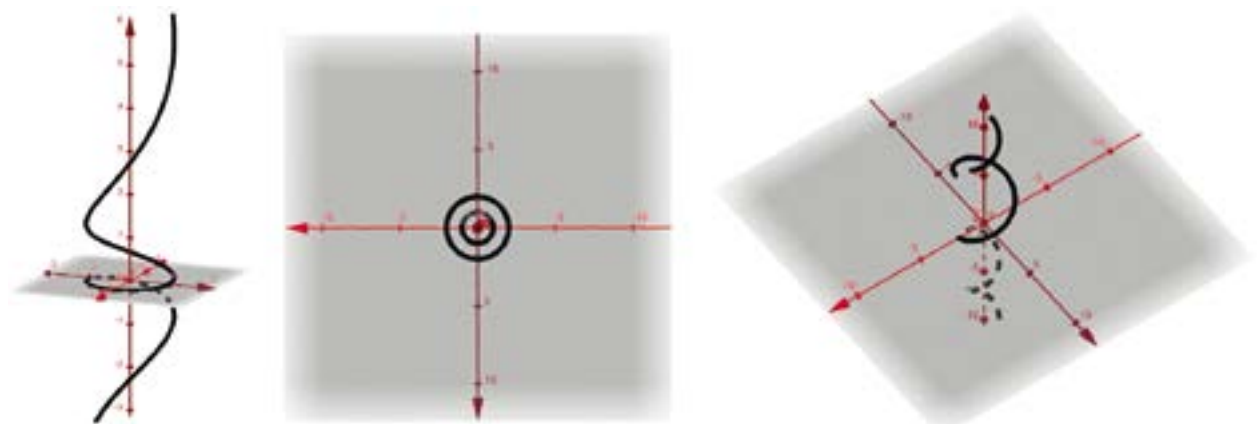


Figura 3.55. Izquierda: hélice a distintas velocidades de crecimiento. Centro y derecha: hélice definida por función a trozos. Dibujo de los autores.

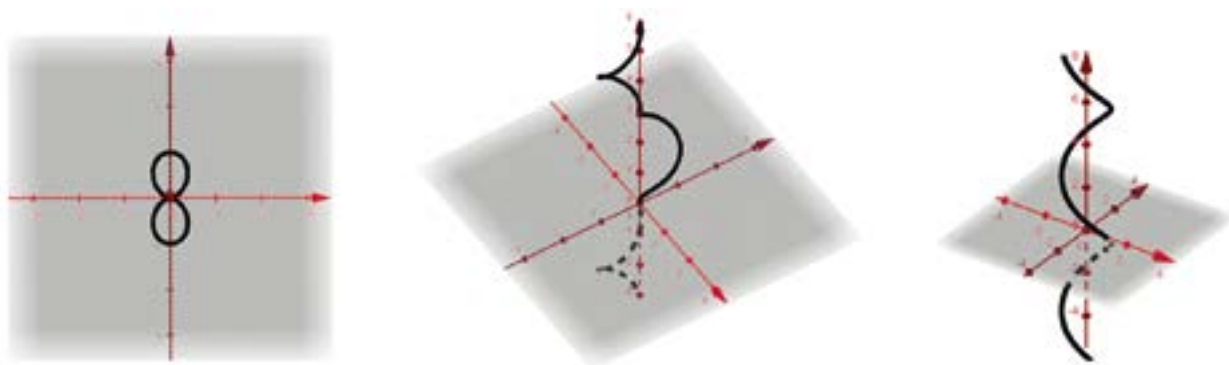


Figura 3.56. Izquierda y centro: hélice con radio de apertura sinusoidal. Derecha: hélice con giro en sentido contrario. Dibujo de los autores.

Este hecho que acabamos de hacer notar es la clave para el giro buscado. Fijémonos en las dos primeras componentes en $\alpha(t) = [\cos(t), \sin(t), t]$. Para un valor de nulo, nos situamos en el punto $(1,0)$ y, a medida que aumenta, el ángulo lo hace también, desde un ángulo inicial de 0° . Por tanto, para comenzar en un ángulo de 180° , basta que para el valor del parámetro nulo nos situemos en el punto $(-1,0)$, y, a medida que el parámetro aumenta, hagamos aumentar el ángulo de giro.

Con las indicaciones realizadas, parece que la parametrización:

$$\alpha(t) = [\cos(t + \pi), \sin(t + \pi), t]$$

resuelve el problema. Mediante las relaciones trigonométricas de suma de ángulos se tiene que:

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

y

$$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$$

Poniendo $a = t$ y $b = \pi$ podemos escribir de forma más compacta la parametrización anterior como:

$$\alpha(t) = [-\cos(t), -\sin(t), t]$$

cuyo resultado gráfico se representa en la Figura 3.57.

Como última acción introductoria, vamos a construir un helicoides a partir de la hélice dada por la parametrización $\alpha(t) = [\cos(t), -\sin(t), t]$. Cada uno de los puntos $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la hélice se sustituirá por un segmento de cierta longitud contenido en la recta que une al punto P con el punto $Q = (0,0, z_0)$. De manera poco precisa, pero más intuitiva, un helicoides es una superficie que visualmente se corresponde con una rampa sustentada en la hélice.

¿Cómo podemos realizar esta operación de tránsito desde la hélice al helicoides? La descripción inicial del helicoides permite razonar. Para construir una superficie necesitamos dos parámetros. El primero lo usaremos para dibujar la hélice que sustente la construcción. Ahora, para cada punto de la hélice necesitamos dar profundidad en una cierta dirección. Así, si tenemos un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la hélice, incluiremos un cierto segmento hacia el punto $Q = (0,0, z_0)$. Este segmento está contenido en la recta $(x, y, z) = P + t\vec{PQ}$. Las ecuaciones paramétricas de dicha recta son:

$$\begin{cases} x = x_0 + tx_0 \\ y = y_0 + ty_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Para el valor $t = 0$ recuperamos el punto P , mientras que para el valor $t = -1$ recuperamos el valor de Q , luego haremos variar el parámetro en la parametrización de nuestra superficie desde el valor $-A$ hasta 0 , para cierto valor de $0 < A < 1$. La parametrización final de la superficie tendría la siguiente forma, para $A = 1/3$.

$$X(u, v) = [\cos(u)(1 + v), \sin(u)(1 + v), u]$$

siendo el parámetro que se mueve construyendo la hélice, y donde se mueve en el segmento mencionado anteriormente. Varía, por tanto, entre todos los valores reales, mientras que variará entre $-1/3$ y 0 .

A continuación, mostramos el resultado en la Figura 3.57, generada a partir de Geogebra.

Llegado a este punto, vamos a proceder a la representación de las rampas interiores del Reichstag. Como primera aproximación, vamos a considerar la cúpula en el edificio como si tuviera forma de semiesfera. Esto no es así en realidad. Haciendo uso del programa Geogebra distinguimos su forma más

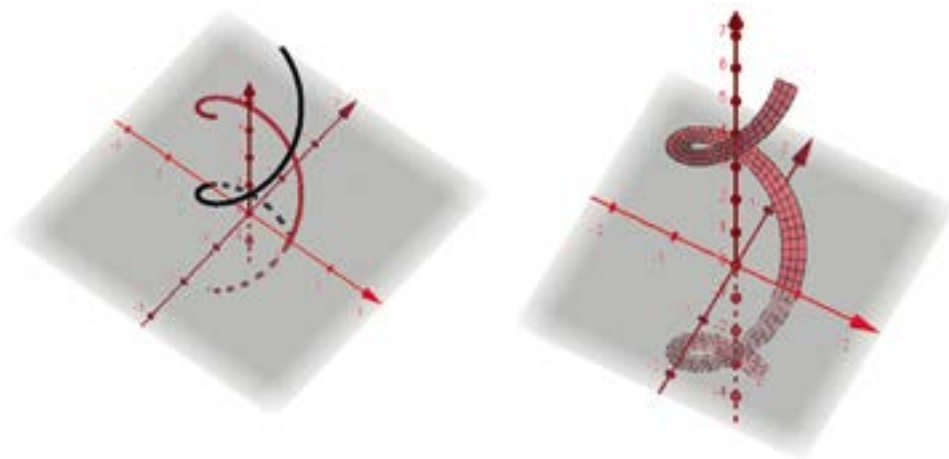


Figura 3.57. Izquierda: combinación de hélices. Derecha: helicoide. Dibujo de los autores.

bien de elipsoide, frente a la forma circular en un corte vertical.

Supondremos que la cúpula es semiesférica en aras de una geometría más simple. Además, consideraremos el suelo de la cúpula como el plano $z = 0$.

Observando la sección de la Figura 120 se destacan una serie de puntos acerca de esta:

- Existen dos rampas, giradas una con respecto a la otra en 180° .
- Cada una de las rampas realiza 3 vueltas y media en torno al eje.
- Las rampas se ajustan a la forma de la semiesfera.

De los puntos anteriores, solo queda este último por ser explicado.

Partimos de la esfera centrada en el origen de coordenadas, de cierto radio $R > 0$, que precisaremos. Esta corresponde a la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Por otro lado, consideramos la parametrización de la hélice $\alpha(t) = [\cos(t), -\sin(t), t]$. Como se ha visto, podemos multiplicar las dos primeras componentes por una función que dependa de t de forma que el radio de la circunferencia varíe al seguir la trayectoria dibujada por la hélice.

$$\alpha(t) = [g(t), \cos(t), g(t) \sin(t), t].$$

Para que esta se ajuste a la semiesfera, se tiene que cumplir que $t > 0$, y además

$$g(t)^2 \cos^2(t) + g(t)^2 \sin^2(t) + t^2 = 1,$$

de donde se deduce que $g(t)^2 + t^2 = 1$, por lo que la función $g(t) = \sqrt{1 - t^2}$ para $t \in [0, 1]$ genera la hélice considerada. Para que la hélice realice un número distinto de vueltas, se siguen las técnicas explicadas a lo largo del capítulo, lo que dejamos como planteamiento a resolver por el lector.

4. CONCLUSIONES

La arquitectura estudiada en este trabajo destaca por el uso consciente de las propiedades de curvas y superficies parametrizables. Los dos primeros capítulos del libro se han dedicado a establecer el marco teórico, los conceptos generales y las referencias fundamentales necesarios para alcanzar una lectura fundamentada de las obras de geometría compleja. El tercer capítulo forma el cuerpo principal, y ha abordado los análisis geométricos de una selección de proyectos con el objeto de analizar las decisiones del diseñador y comprobar en qué medida están ligadas a las características geométricas de cada curva o superficie.

Dichos análisis constituyen una propuesta didáctica, dirigida a arquitectos e ingenieros noveles, que utiliza simultáneamente herramientas de parametrización matemática y dibujo CAD en un entorno tridimensional para estudiar de manera crítica la arquitectura. Este método de trabajo permite diferenciar los proyectos en los que el diseño surge a partir de elementos, principios y transformaciones

propios de sus curvas y superficies de aquellos otros que exhiben formas dinámicas, aparentemente complejas, generadas y modificadas siguiendo criterios más formales que estructurales.

Además, al agrupar estas arquitecturas en función de sus autores, pretendemos subrayar hasta qué punto son los diseñadores quienes muestran a través de sus obras esa preocupación por la concepción de la forma a partir de ideas geométricas puras, y confían en sus propiedades para obtener el mayor rendimiento material, estructural y espacial en sus trabajos.

Por último, a lo largo del texto que aquí termina hemos puesto en valor la base matemática que exigen los cálculos paramétricos, la visión espacial que se requiere para relacionar en tres dimensiones los elementos geométricos y el dominio de la técnica que demanda la materialización de las obras. Todo ello se resume en el alto valor que atribuimos a la formación en geometría para arquitectura e ingeniería y a su carácter multidisciplinar.

5. REFERENCIAS

- ADELL, Josep M.^a, y GARCÍA SANTOS, A. (2005). «Gaudí y las bóvedas de las escuelas de la Sagrada Familia», *Informes de la construcción*, vol. 56, n.º 496: 31-45. doi: 10.3989/ic.2005.v57.i496.461.
- AIMOND, F. (1936). «Étude statique des voiles minces en paraboloides hyperboliques travaillant sans flexion», *IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen*, vol. 4: 1. doi: 10.5169/seals-5075.
- ALSINA, Claudi (2002). «Conoides» in *Gaudí. La búsqueda de la forma* Lunverg, Barcelona: 88-95.
- ALSINA, Claudi, y GÓMEZ-SERRANO, Josep (2002). «Geometría Gaudiniana», in *Gaudí. La búsqueda de la forma* Lunverg, Barcelona: 26-45.
- ANTUÑA BERNARDO, Joaquín (2003). *Las estructuras de edificación de Eduardo Torroja Miret*, E.T.S. Arquitectura (UPM).
- ARANDA ALONSO, María (2015). «Alonso de Vandervelde y Philibert de l'Orme: dos tratados, dos maneras», *BSAA arte*, n.º 81: 99-121.
- BAGHDADI, Abtin; HERISTCHIAN, Mahmoud, y KLOFT, Harald (2019). «Structural assessment of remodelled shells of Heinz Isler», *International journal of advanced structural engineering*, vol. 11, n.º 4: 491-502. doi: 10.1007/s40091-019-00248-4.
- BASSEGODA-NONELL, Juan (1994). «Las escuelas provisionales de la Sagrada Familia», *Academia (Real Academia de Bellas Artes de San Fernando)*, vol. 3, n.º 79: 151-173.
- BASTERRA OTERO, Alfonso (2001). «Félix Candela y el borde libre. El caso de la capilla de Palmira de Cuernavaca», *Bitácora arquitectura*, n.º 5.
- BILLINGTON, David P. (1983). *The tower and the bridge: the new art of structural engineering*, New York Basic Books, New York.
- BILLINGTON, David P. (1974). «An Example of Structural Art: The Salginatobel Bridge of Robert Maillart», *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 33, n.º 1: 61-72. doi: 10.2307/988839.
- BROWN, Jeff L. (2014). «Covered coliseum: Dorton Arena», *Civil engineering (New York, N.Y. 1983)*, vol. 84, n.º 9: 46-49. doi: 10.1061/ciegag.0000586.
- BRUFAU, Robert (1999). «Las bóvedas gausas», *DPA: documents de projectes d'arquitectura*, n.º 15.
- BURGOS ROMÁN, Juan de (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana*, 3.^a ed., McGraw-Hill, Madrid.
- BUXADÉ, Carles, y MARGARIT, Joan (2002). «Bóvedas hiperbólicas», in *Gaudí. La búsqueda de la forma* Lunverg, Barcelona: 112-117.
- CABEZA-LAINEZ, José M.; JIMÉNEZ-VERDEJO, Juan R.; SANCHEZ-MONTANES-MACIAS, Benito, y PÉREZ-CALERO, Jose I. (2009). «The key-role of Eladio Dieste, Spain and the Americas in the evolution from brickwork to architectural form», *Journal of Asian architecture and building engineering*, vol. 8, n.º 2: 355-362. doi: 10.3130/jaabe.8.355.
- CABEZOS-BERNAL, Pedro, y CISNEROS-VIVÓ, Juan, J. (2020). «Single-Row Spherical Domes in Stereotomy Treatises», *Nexus network journal*, vol. 22, n.º 4: 853. doi: 10.1007/s00004-020-00502-3.
- CABO, M. C. F.; URIEL, A. G., y DE MIGUEL, M. (2017). «La triple escalera de caracol en el Convento de Santo Domingo de Bonaval (Santiago, España): Hipótesis de diseño y construcción», *Informes de la construcción*, vol. 69, n.º 546: 202-e202. doi: 10.3989/ic.16.119.
- CALIÒ, Franca, y MARCHETTI, Elena (2019). «Two Architectures: Two Compared Geometries», *Nexus network journal*, vol. 21, n.º 3: 527-545. doi: 10.1007/s00004-018-0413-9.
- CALVO LÓPEZ, José (2009). «El Manuscrito Cerramientos y trazas de montea de Ginés Martínez de Aranda», *Archivo español de arte*, vol. 82, n.º 325: 1-18. doi: 10.3989/aearte.2009.v82.i325.135.
- CALVO-LÓPEZ, José (2006). *Las trompas del Puente Viejo de Murcia. Tratadística francesa y tradición hispánica en la construcción pétreo del primer siglo XVIII*.
- CAMPO BAEZA, Alberto (2010). «El MA: Museo de la Memoria de Andalucía», *Arte y Cemento*, n.º 2115.
- CANDELA OUTERIÑO, F.; PEYRI MACÍA, A., y CASTAÑEDA TAMBORRELL, E. (1968). «Palacio de los Deportes», *Informes de la construcción*, vol. 21, n.º 205: 6-12. doi: 10.3989/ic.1968.v21.i205.3796.
- CASSINELLO PLAZA, Pepa y TORROJA, José A. (2007). «Enrique Hossdorf. Arte e innovación en ingeniería», *Informes de la construcción*, vol. 59, n.º 505: 85-87.
- CASSINELLO, P. (2006). «En Memoria de Heinz Hossdorf», *Informes de la construcción*, vol. 58, n.º 502: 63-81. doi: 10.3989/ic.2006.v58.i502.389.
- CASSINELLO, Pepa (2010). *Félix Candela. La conquista de la esbeltez*, Ayuntamiento de Madrid, Madrid.
- CHÍAS NAVARRO, Pilar, y ABAD BALBOA, Tomás (2005). *Eduardo Torroja: obras y proyectos*, Instituto Eduardo Torroja, Madrid.
- CHILTON, John (2000). *Heinz Isler: the engineer's contribution to contemporary architecture*, London Thomas Telford, London.

- CHILTON, John, y CHUANG, Chu-Chun (2017). «Rooted in Nature: Aesthetics, Geometry and Structure in the Shells of Heinz Isler», *Nexus network journal*, vol. 19, n.º 3: 763-785. doi: 10.1007/s00004-017-0357-5.
- CIFRE, Hugo, GOMIS, Álvaro y MAURE, Miguel Á. (2023). *Espacio La Nube*. Available: <https://www.espaciolanube.com/proyectos> [2023, 01/03/].
- CLETO, Barreiro S., y CARAMÉS GÓMEZ, Fernando (2007). «Estructura de madera para la cubierta de un auditorio al aire libre en el parque El Paraíso, San Blas (Madrid)», *Informes de la construcción*, vol. 59, n.º 506: 5-14. doi: 10.3989/ic.2007.v59.i506.503.
- CORRES, Hugo; LATERRA, Claudia, y MIRAVALLE, Estefanía (2010). *Iglesia Nuestra Señora de Guadalupe: Madrid, 1962-1963*, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.
- CORTÉS, A.; SAMPER, A., y HERRERA, B. (2019). «Geometric determination of the hyperbolic paraboloids of the vaults in the entrance porch to the Crypt of Colònia Güell by Antoni Gaudí», *Informes de la construcción*, vol. 71, n.º 554: e295. doi: 10.3989/ic.63691.
- DARVILL, Timothy (2012). «Stonehenge remodelled», *Antiquity*, vol. 86, n.º 334: 1021-1041. doi: 10.1017/S0003598X00048225.
- DAVEY, P. (1999). «Democracy in Berlin (Reichstag, Berlin, Germany, Foster-and-Partners, architect)», *The Architectural review (London)*, vol. 206, n.º 1229: 34-47.
- DE DIOS DE LA HOZ, J., y CLEMENTE, C. (1998). «La construcción con cerámica armada. Iglesia de San Juan de Ávila, en Alcalá de Henares/España», *Informes de la construcción*, vol. 49, n.º 453: 41-53. doi: 10.3989/ic.1998.v49.i453.919.
- DE LEYVA, Manuel T. (2010). «A la luz de las cúpulas. Restauración del Reichstag de Berlín (1992-1999). Foster & Partners», *Revista proyecto, progreso, arquitectura*, vol. 2: 82-95.
- DE L'ORME, Philibert (1568). *Le premier tome de l'Architecture, de Philibert de L'Orme...*, F. Morel, Paris.
- DE MIGUEL SÁNCHEZ, Manuel; LASTRA SEDANO, Alberto, y CASTAÑO PEREA, Enrique (2013). *La Geometría, Matemáticas y Dibujo: Experiencias del Taller de Dibujo 2 en Arquitectura*, Servicio de Publicaciones. Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares.
- DERAND, François (1643). *L'Architecture des voûtes, ou l'Art des traits et coupe des voûtes*. S. Cramoisy, Paris.
- DIESTE, Eladio (1961). «Iglesia en Montevideo. Templo parroquial de Atlántida», *Informes de la construcción*, vol. 13, n.º 127: 43-56.
- DRAPER, Powell (2008). «Finite-Element Analysis of Felix Candela's Chapel of Lomas de Cuernavaca», *Journal of Architectural Engineering*, vol. 14, n.º 2: 47-53. doi: 10.1061/(ASCE)1076-0431(2008)14:2(47).
- ECHEVARRÍA, L.; GARNICA, C., y GUTIÉRREZ, J. P. (2014). «La costilla laminar del Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (IETcc-CSIC). Levantamiento mediante láser-escáner y evaluación estructural», *Informes de la construcción*, vol. 66, n.º 536: e038. doi: 10.3989/ic.14.116.
- ESCRIG, Félix, y SÁNCHEZ, José (2005). «The concrete vault of Club Táchira in Caracas», *Informes de la construcción*, vol. 57, n.º 499-500. doi: 10.3989/ic.2005.v57.i499-500.488.
- ESPION, Bernard (2016). «Pioneering hypar thin shell concrete roofs in the 1930s», *Beton- und Stahlbetonbau*, vol. 111, n.º 3: 159-165. doi: 10.1002/best.201600001.
- ESPION, Bernard (2018). «Thin concrete shells by Eugène Freyssinet» in *Building Knowledge, Constructing Histories*, 1st edn, CRC Press: 199-206.
- ESQUILLAN, N. (1969). «Estadio olímpico para deportes de hielo, en Grenoble, Francia», *Informes de la construcción*, vol. 22, n.º 215: 65-86. doi: 10.3989/ic.1969.v22.i215.3652.
- FABER, Colin (1970). *Las estructuras de Candela*, México etc. Compañía Editorial Continental, México etc.
- FERNÁNDEZ ORDÓÑEZ, José A. (1978). *Eugène Freyssinet*, Hospitalet de Llobregat 2c, Hospitalet de Llobregat.
- FERNÁNDEZ ORDÓÑEZ, José A. (2010). «Eugène Freyssinet, 24 años después de su muerte = Eugène Freyssinet, 24 years after his death», n.º.
- FRÉZIER, Amédée (1737). *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils & militaires, ou Traité de stéréotomie, à l'usage de l'architecture*. L.-H. Guérin aîné (Paris), Paris.
- GARCÍA DE CASTRO, Rafael (1968). «Iglesia de los doce Apóstoles», *Arquitectura*, vol. 119: 34-37.
- GARCÍA REIG, Carmen (1999). «La geometría en la obra de Eduardo Torroja», *Revista de Obras Públicas*, vol. 3393: 15.
- GARLOCK, Maria E. M., y BILLINGTON, David P. (2009). *Felix Candela's Legacy*, Editorial Universitat Politècnica de València.
- GIL LÓPEZ, Tomás (2006). *Superficies cuádricas y sus combinaciones*, Madrid Instituto Juan de Herrera, Madrid.
- GIRALT-MIRACLE, Daniel (2002). *Gaudí, la búsqueda de la forma: espacio, geometría, estructura y construcción: [exposición]*, Barcelona Lunwerk, Barcelona.
- GÓMEZ-SERRANO, Josep (2002). «Arcos catenarios» in *Gaudí. La búsqueda de la forma* Lunwerk, Barcelona: 96-103.
- GONZÁLEZ, Genaro; SAMPER, Albert, y HERRERA, Blas (2021). «Acoustic simulation of the central hall in Palau Güell by Gaudí», *Architecture and Engineering*, vol. 6, n.º 2: 18-30. doi: 10.23968/2500-0055-2021-6-2-18-30.
- GONZÁLEZ, Josep-Lluís, y CASALS, Albert (2002). «Bóvedas convexas» in *Gaudí. La búsqueda de la forma* Lunwerk, Barcelona: 74-81.
- GUINDAL, Antonio J. M., y ADELL, Josep M. (2005). «Eladio Dieste y la cerámica estructural en Uruguay», *Informes de la construcción*, vol. 56, n.º 496: 13-23. doi: 10.3989/ic.2005.v57.i496.459.

- HEYMAN, Jacques (1999). *El esqueleto de piedra: mecánica de la arquitectura de fábrica*, Instituto Juan de Herrera, Madrid.
- HINES, Eric M. (2004). «Anton Tedesco and the Introduction of Thin Shell Concrete Roofs in the United States», *Journal of Structural Engineering*, vol. 130, n.º 11: 1639-1651. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:11(1639).
- IZQUIERDO ASENSI, Fernando (1996). *Geometría descriptiva superior y aplicada / Fernando Izquierdo Asensi*, 5.ª ed. tot. rev. edn, Madrid: Paraninfo, Madrid.
- IZQUIERDO ASENSI, Fernando (1985). *Geometría descriptiva*, 15.ª ed. edn, Madrid Dossat, Madrid.
- JOEDICKE, Jürgen (1964). *Shell Architecture*, Reinhold, Nueva York.
- JUNGJOHANN, Hauke, y WOODINGTON, Walter (2016). «Ontario Celebration Zone Pavilion: A Large Pneumatic Structure», *Procedia engineering*, vol. 155: 507-515. doi: 10.1016/j.proeng.2016.08.054.
- KIUNTSI, Romana; STEPANYUK, Andriy; BESAHA, Iryna, y SOBCZAK-PIASTKA, Justyna (2020). «Metamorphosis of the Architectural Space of Goetheanum», *Applied sciences*, vol. 10, n.º 14: 4700. doi: 10.3390/app10144700.
- KOTNIK, Toni (2011). «The architecture of Heinz Isler», *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 52: 185-190.
- LAFFRANCHI, Massimo, y MARTI, Peter (1997). «Robert Maillart's Curved Concrete Arch Bridges», *Journal of structural engineering (New York, N.Y.)*, vol. 123, n.º 10: 1280-1286. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1997)123:10(1280).
- LASTRA SEDANO, Alberto (2021). *Parametric geometry of curves and surfaces: architectural form-finding*, 1.ª ed. edn, Springer, Imprint: Birkhäuser, Basel, Switzerland.
- LASTRA SEDANO, Alberto (2015). *Geometría de curvas y superficies con aplicaciones en arquitectura*, 1.ª ed., Paraninfo, Madrid.
- LASTRA, Alberto, y DE MIGUEL, Manuel (2020). «Geometry of Curves and Surfaces in Contemporary Chair Design», *Nexus network journal*, vol. 22, n.º 3: 643-657. doi: 10.1007/s00004-020-00477-1.
- LEROY, Charles F. A. (1842). *Traité de géométrie descriptive, suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques*, 2.º éd. rev. et augm. edn, Paris Bachelier; Paris Carilian-Goeury et Dalmont, Paris.
- LÓPEZ MOZO, Ana (2008). «Tres monteas escurialenses», *EGA: revista de expresión gráfica arquitectónica*, vol. 13, n.º 13: 190-197. doi: 10.4995/ega.2008.10284.
- LÓPEZ MOZO, Ana (2011). «Ovals for Any Given Proportion in Architecture: A Layout Possibly Known in the Sixteenth Century», *Nexus network journal*, vol. 13, n.º 3: 569-597. doi: 10.1007/s00004-011-0083-3.
- LÓPEZ-MOZO, Ana (2013). «La huella de El Escorial en las cúpulas españolas de finales del siglo XVI. El caso de la capilla Cerralbo de Ciudad Rodrigo», *Informes de la construcción*, vol. 65, n.º 2: 95-109. doi: 10.3989/ic.13.015.
- LOZANO-GALANT, Jose, y PAYÁ-ZAFORTEZA, Ignacio (2011). «Structural analysis of Eduardo Torroja's Frontón de Recoletos' roof», *Engineering Structures*, vol. 33, n.º 3: 843-854. doi: 10.1016/j.engstruct.2010.12.006.
- MAILLART, Robert, y BILL, Max (1955). *Robert Maillart*, [2.ª ed.]. edn, Zurich Girsberger, Zurich.
- MARTÍN FUENTES, Javier (2018). *Turning Point at the UNESCO Headquarters. Crossed Influences between Pier Luigi Nervi and Marcel Lajos Breuer*, Editorial Universitat Politècnica de València.
- MARTÍNEZ, Isabel, y CASTILLO, Ángel (2018). «Más allá de la rehabilitación en una obra emblemática: monitorización de las cubiertas del hipódromo de la Zarzuela = Beyond the rehabilitation in an emblematic work: monitoring the decks of the Zarzuela racecourse», *Anales de edificación*, vol. 4, n.º 2: 61-68. doi: 10.20868/ade.2018.3780.
- MARTÍNEZ, Mónica (2018). «Calculation process of long cylindrical shells in the work of Felix Candela. The equilibrium approach», *Informes de la construcción*, vol. 70, n.º 551: e260. doi: 10.3989/ic.56644.
- MARTÍN-PASTOR, Andrés, y GARCÍA-ALVARADO, Rodrigo (2019). *Developable Wooden Surfaces for Lightweight Architecture: Bio-Dune Pavilion*, Cham: Springer International Publishing, Cham. doi: 10.1007/978-3-030-03676-8_60.
- MAS GUINDAL, Antonio, y ADELL, Josep M. (2005). «Eladio Dieste y la cerámica estructural en Uruguay», *Informes de la Construcción*, vol. 56, n.º 496: 13.
- MATEO, Josep L., GAUSA, Manuel, y THORNE, Marta (1986). «Memorias de un constructor, entrevista a Félix Candela = Memories of a constructor, interview with Félix Candela», *Quaderns d'arquitectura i urbanisme*, n.º 171, pp. 52-61.
- MONGE, Gaspard (1996). *Geometría descriptiva*, Madrid Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid.
- MONTES, Carlos (1992). *Representación y análisis formal: lecciones de análisis de formas*, Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones, Valladolid.
- MORAGUES, Juan J.; PAYA-ZAFORTEZA, Ignacio; MEDINA, Oswaldo, y ADAM, José M. (2015). «Eduardo Torroja's Zarzuela Racecourse grandstand: Design, construction, evolution and critical assessment from the Structural Art perspective», *Engineering Structures*, vol. 105: 186-196. doi: 10.1016/j.engstruct.2015.10.008.
- NAVASCUÉS PALACIO, Pedro (1971). «El «Manuscrito de Arquitectura» de Hernán Ruiz, el Joven», *Archivo español de arte*, vol. 44, n.º 175: 295.
- PETROSKI, Henry (2002). «Dorton Arena: On the occasion of its 50th anniversary and its dedication as a National Historic Civil Engineering Landmark», *American Scientist*, vol. 90, n.º 6: 503. doi: 10.1511/2002.39.503.
- PETROVIC, Maja; MIJALOVIC, Radomir; MALESEVIC, Branko; DORDEVIC, Dorde, y STULIC, Radovan

- (2018). «The use of Weber's focal-directorial plane curves as approximation of top view contour curves at architectural buildings objects», *Facta universitatis. Series: Architecture and Civil Engineering*, vol. 16, n.º 2: 237-246. doi: <https://doi.org/10.2298/FUACE171130005P>.
- RABASA, E. (2013). «Estereotomía: teoría y práctica, justificación y alarde», *Informes de la construcción*, vol. 65, n.º 2: 5-20. doi: 10.3989/ic.13.014.
- RABASA, Enrique, y GENTIL, José M. (1996). «Sobre la geometría descriptiva y su difusión en España», en eds. A. D. Campo y Francés, J. M. Gentil Baldrich, E. Rabasa Díaz & Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid), Madrid Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid.
- REY-REY, Juan (2014). «Aplicación de algoritmos paramétricos en el diseño estructural. La Ópera de Sídney desde una perspectiva contemporánea», *Informes de la construcción*, vol. 66, n.º 1: m016. doi: 10.3989/ic.13.093.
- RUE, Jean B. d. l. (1728). *Traité de la coupe des pierres où par une methode facile & abregée, l'on peut aisément se perfectionner en cette science*, l'Imprimerie Royale, Paris.
- RUI-WAMBA, Javier, y FERNÁNDEZ ALBA, Antonio (2003). *Eugène Freyssinet: un ingeniero revolucionario = un ingénieur révolutionnaire*, Madrid Fundación Esteyco, Madrid.
- RUIZ AIZPIRI, José M. (1972). «Las formas libres y la geometría», *Informes de la construcción*, vol. 25, n.º 242: 61-65. doi: 10.3989/ic.1972.v25.i242.3218.
- RUIZ, Hernán (1560). *Libro de arquitetura*, [Ed. facs.] edn, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid.
- SALVATORE, Marta (2011). «Prodromes of Descriptive Geometry in the Traité de stéréotomie by Amédée François Frézier», *Nexus network journal*, vol. 13, n.º 3: 671-699. doi: 10.1007/s00004-011-0086-0.
- SAMPER, Albert; GONZÁLEZ, Genaro, y HERRERA, Blas (2017). «Determination of the geometric shape which best fits an architectural arch within each of the conical curve types and hyperbolic-cosine curve types: The case of Palau Güell by Antoni Gaudí», *Journal of cultural heritage*, vol. 25: 56-64. doi: 10.1016/j.culher.2016.11.015.
- SANJURJO ÁLVAREZ, Alberto (2015). *La escalera de caracol en los tratados de cantería españoles de la Edad Moderna y su presencia en el Patrimonio Construido hispánico: estudio geométrico y constructivo*, E.T.S. Arquitectura (UPM).
- SANZ SERNA, Jesús M. (1998). *Diez lecciones de cálculo numérico*, Universidad de Valladolid, Valladolid.
- SENENT-DOMÍNGUEZ, R., y PÉREZ-DE-LOS-RÍOS, C. (2013). «La construcción de la bóveda de arista rectangular en el tratado de Gelabert: Teoría y práctica», *Informes de la construcción*, vol. 65, n.º 2: 111-125. doi: 10.3989/ic.13.012.
- SERLIO, Sebastiano (1551). *Tutte l'opere d'architettura et Prrospectiva di Sebastiano Serlio Bolognese*, Venezia: preffo gli Heredi di Francefco de'Francefchi.
- TORROJA, Eduardo (1962a). «La Cuba hiperbólica de Fedala», *Informes de la construcción*, vol. 14, n.º 137: 97-102. doi: 10.3989/ic.1962.v14.i137.4937.
- TORROJA, Eduardo (1962b). «Hipódromo de la Zarzuela», *Informes de la construcción*, vol. 14, n.º 137: 19-38. doi: 10.3989/ic.1962.v14.i137.4930.
- TORROJA, Eduardo (1962c). «Mercado de Algeciras», *Informes de la construcción*, vol. 14, n.º 137: 51-58.
- TORROJA, J. A.; CASSINELLO, P., y SCHLAICH, M. (2010). «Félix Candela. In memoriam (1910-1997). From thin concrete shells to the 21st century's lightweight structures», *Informes de la Construcción*, vol. 62, n.º 519: 5-26.
- VALLÉE, Louis L. (1825). *Traité de la Géométrie Descriptive*, Bachelier, Paris.
- VANDELVIRA, ALONSO D.; PALACIOS GONZALO, JOSÉ C., y SOMBIGO, Bartolomé (2015). Universidad Politécnica de Madrid E.T.S. de Arquitectura & Instituto Juan de Herrera. *Libro de trazas de cortes de piedras: copia manuscrita presentada por Bartolomé de Sombigo y Salcedo*, facs. edn, Instituto Juan de Herrera, Madrid.
- VITRUBIO POLIÓN, Marco (1999). *Los X libros de arquitectura de Marco Vitruvio Polion según la traducción castellana de Lázaro de Velasco*, Cicon, Cáceres.
- XENAKIS, Iannis, y LE CORBUSIER, Iannis (1994). «Philips Pavilion», *Any (New York, N.Y.)*, n.º 5: 34-35.
- ZASTAVNI, Denis (2011). «Robert Maillart's Innovative Use of Concrete», *DOCOMOMO journal*, n.º 45. doi: 10.52200/45.A.C9UKIoF3.

6. ÍNDICE ONOMÁSTICO

- Aimond, Fernand, 28, 59, 76
Alberti, Leon Battista, 15
Apolonio de Pérgamo, 15
- Baroni, Giorgio, 59
Barreiro, Cleto
 Auditorio del Parque el Paraíso (Madrid), 27, 28
Brunelleschi, Filippo, 13
 Santa María de las Flores (Florencia), 11, 13
- Candela, Félix, 7, 11, 12, 25, 26, 27, 28, 57, 59, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 107, 108, 109, 110
 Capilla de Palmira (Cuernavaca), 7, 27, 28, 81, 82, 107,
 Iglesia de Nuestra Señora de Guadalupe (Madrid), 7, 76, 83, 84, 85, 108,
 Pabellón de los Rayos Cósmicos (Ciudad de México), 7, 30, 76, 77
 Palacio de los Deportes (Ciudad de México), 25, 27, 107, 108
 Restaurante los Manantiales (Xochimilco, Ciudad de México), 7, 12, 27, 28, 77, 78, 79
Columna de Trajano (Roma), 22
- de Goiti, Felipe Lázaro, 43
de la Rue, Jean-Baptiste, 46, 47, 48, 49
della Francesca, Piero, 15
Derand, François, 49, 107
Desargues, Gérard, 49
Dieste, Eladio, 7, 33, 89, 90, 91, 93, 107, 108, 109
 Iglesia del Cristo Obrero (Atlántida), 33, 89, 90, 91, 93, 94
Dischinger, Franz, 25, 67, 75
 Zeiss-Planetarium (Jena), 25
Durero, Alberto, 15
- EFFEKT Studio, 29
 Mirador Treetop (Copenhague), 29
Esquillan, Nicolas, 11, 27, 108
- Foster, Norman, 8, 23, 24, 32, 99, 100, 101, 108
 cúpula del Reichstag (Berlín), 8, 23, 24, 32, 99, 100, 101, 102, 108
Freyssinet, Eugène, 7, 13, 27, 32, 57, 59, 60, 61, 63, 108, 110
 Hangares de Orly (Orly), 7, 13, 26, 27, 59, 60, 61, 62, 63
Frézier, Amédée, 41, 48, 49, 50, 51, 108, 110
- García, Justo, 29, 30
 Estación de autobuses de El Casar, 29, 30
Gaudí, Antonio, 7, 19, 23, 25, 33, 55, 57, 58, 59, 107, 108, 110
 Colònia Güell (Barcelona), 58, 59, 108
 Palacio Güell (Barcelona), 23, 25, 108, 110
 Sagrada Familia (Barcelona), 19, 33, 57, 58, 59, 107
Gauss, Johann Carl Friedrich, 11, 89
- Hossdorf, Heinz, 7, 26, 27, 87, 88, 89, 107
 fábrica de Gossau, 7, 26, 27, 87, 88, 89
Hutchinson, William James, 30
- Isler, Heinz, 11, 19, 33, 34, 107, 108, 109
 Fábrica Sicli (Ginebra), 33, 34
- Joedicke, Jürgen, 34, 35, 59, 109
Johanson, Markus, 29
 Silla Nest Chair, 29
- Kahn, Louis, 20,
 Museo de Arte Kimbell (Texas), 20
- Lafaille, Bernard, 59
Le Corbusier, 28, 29, 110
 Palacio de la Asamblea (Chandigarh), 29
Leroy, Charles Felix Auguste, 55, 56, 57, 109
- Maillart, Robert, 7, 12, 27, 63, 64, 66, 107, 109
 Hall del Cemento (Zúrich), 7, 12, 26, 63, 66, 107
Martínez de Aranda, Ginés, 41, 43, 45, 46, 107
Mezquita de Samarra, 22
Miguel Ángel, 17, 18
 Campidoglio (Roma), 17, 18
Monasterio de Santa Catalina (Toledo), 22, 42
Monge, Gaspard, 11, 50, 53, 55, 109
- Nervi, Pier Luigi, 11, 33, 109
Niemeyer, Oscar, 19, 30
Nowicki, Matthew, 7, 85
 Dorton Arena, 7, 85, 86, 87, 107, 109
Nunes, Pedro, 45
- Panteón de Agripa (Roma), 11, 12, 13, 24, 26, 68
Pontarini, Hariri, 33, 34
 Ontario Pavillion (Toronto), 33, 34
- Ruiz, Hernán (cantero), 40, 109, 110

- Saarinen, Eero, 7, 25, 94
 Auditorio Kresge (Cambridge), 7, 25, 94, 97
 Ingalls Rink, 7, 96, 98
 Sánchez Arcas, Manuel, 67
 Santa Sofía de Constantinopla (Estambul), 11
 Serlio, Sebastiano, 15, 39, 40, 41, 110
 Shújov, Vladimir, 19
 Sombigo y Salcedo, Bartolomé, 43, 110
 Steiner, Rudolf, 25
 Primer Goetheanum (Dornach), 24, 25, 109
 Tedesko, Anton, 82, 109
 Torroja, Eduardo, 7, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 25, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 57, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 87, 107, 108, 110
 Club Tachira (Caracas), 33, 34, 108
 Depósito de Fedala, 7, 19, 29, 34, 67, 74, 75, 110
 Frontón de Recoletos (Madrid), 26, 27, 67, 109
 Hipódromo de la Zarzuela (Madrid), 7, 12, 29, 34, 35, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 109, 110
 Mercado de Algeciras (Algeciras), 7, 13, 25, 67, 68, 69, 110
 Torroja, José Antonio,
 Costilla Laminar de la Fundación Eduardo Torroja (Madrid), 20, 108
 Utzon, Jorn, 25
 Ópera de Sydney, 25, 110
 Vallée, Louis Léger, 53, 54, 110
 Vandelvira, Alonso, 43, 44, 45, 46, 107, 110
 Vitruvio, Marco, 15, 39, 40, 41, 110
 Yamasaki, Minoru, 82

MONOGRAFÍAS DEL IETcc

ÚLTIMOS TÍTULOS PUBLICADOS

427. Eloy Asensio de Lucas (coord.), *Valorización de los residuos de construcción y demolición (RCD) como puzolanas alternativas*, 2018.
428. Ignacio Oteiza San José (coord.), *La envolvente energética de la vivienda social. El caso de Madrid en el periodo 1939-1979*, 2018.
429. Ronaldo Soares Teixeira (coord.), *Celulosa nanofibrilada y pulpa celulósica usada como refuerzo en materiales*, 2019.
430. Esperanza Menéndez Méndez, *Estrategia integral de prevención de la reacción árido-álcali*, 2019.
431. Fernando Martínez Soriano y Enrique Martínez Sierra, *Análisis y cálculo de refuerzo de forjados de madera: el CLT como alternativa al hormigón armado*, 2019.
432. David Hernández Falagán, *Innovación tecnológica en la arquitectura de Tous y Fargas*, 2020.
433. Laura Caneda Martínez, Moisés Frías Rojas, César Medina Martínez y María Isabel Sánchez de Rojas Gómez, *Aprovechamiento de los residuos procedentes de la minería del carbón como puzolanas para la fabricación de nuevos eco-cementos*, 2021.
434. Ana Tejero González (coord.), *Tecnologías de enfriamiento evaporativo: hacia una climatización descarbonizada y eficiente*, 2021.
435. María Eugenia Maciá Torregrosa, *Comportamiento de las estructuras de fábrica en caso de incendio. Técnicas de diagnóstico, reglamentación y método simplificado de cálculo*, 2022.
436. Borja Frutos Vázquez (coord.), *Mitigación de radón mediante técnica de despresurización. Avances en el diseño y aplicación*, 2022.
437. Paloma Arias Holguín-Veras, Héctor Orozco Camargo, Raül Serra i Fabregà, Joan-Lluís Zamora i Mestre (coord.), *Revestimientos de trencadís con vidrio veneciano de pan de oro en las arquitecturas del modernismo. Comportamiento y reconocimiento de las anomalía*, 2023.
438. Gabriel Muñoz Rebollo, *Puentes-arco de Gabriel Rebollo Canales, pionero del hormigón armado de finales del siglo XIX a principios del XX*, 2023.
439. Antonia Pacios Álvarez (coord.), *Comportamiento de las estructuras de fábrica en caso de incendio. Técnicas de diagnóstico, reglamentación y método simplificado de cálculo*, 2023.
440. Sergio Martín Blas, *Infraestructura, naturaleza y paisaje: transformaciones del río Manzanares*, 2024.

El presente texto propone una revisión del diseño de las obras de arquitectura e ingeniería contemporáneas desde un punto de vista geométrico-matemático. Incluye análisis que combinan la aproximación aplicada desde las matemáticas con el estudio gráfico arquitectónico, resaltando las conexiones entre ambos campos. Este enfoque es especialmente interesante para ingenieros civiles y arquitectos que desean profundizar en el diseño de proyectos de geometría compleja. El estudio de las obras aquí recogidas, realizadas por autores como Eduardo Torroja, Félix Candela, Eladio Dieste, Eugène Feryssinet o Robert Maillart, componen un conjunto de gran calidad formal, a la vez que demuestran el dominio de la técnica de sus autores.

El libro se divide en tres partes: el primer capítulo se dedica a establecer un marco teórico en el que se definen y ejemplifican las curvas y superficies que intervienen en este trabajo. El segundo capítulo vuelve la vista a los tratados de cantería y geometría descriptiva realizados entre los siglos XVI y XIX, textos en los que se establecen las bases del conocimiento geométrico contemporáneo. El tercer capítulo muestra un estudio original de los autores, aplicando su metodología a obras elegidas para ejemplificar los casos más destacados de geometría compleja en la historia reciente de la construcción.

