

## Prefacio a la segunda edición

El misterio es la cosa más bonita que podemos experimentar. Es la fuente de todo arte y ciencia verdadera.

ALBERT EINSTEIN

Casi nueve años después de la primera edición de este volumen, los autores recibimos una llamada de Editorial CSIC en la cual nos comunicaban que cada vez eran más escasos los ejemplares en depósito y que estaban considerando afrontar una segunda edición del mismo. Se nos presentaba la disyuntiva entre llevar a cabo una simple reimpresión, corrigiendo groseras erratas y haciendo cambios menores, u optar por entrar a fondo en la estructura y los contenidos del libro para mejorar y fortalecer, según nuestro humilde criterio, todos aquellos puntos que no habían quedado suficientemente explicados o que, en el peor de los casos, ni siquiera habían sido abordados.

Después de una breve conversación, los autores teníamos claro que este ofrecimiento era una oportunidad inmejorable para consolidar uno de nuestros proyectos más queridos. Así, aceptamos sin dilación el desafío mayor. Este lo podemos resumir en tres puntos clave:

- 1) corregir y mejorar pequeños errores, imprecisiones y erratas, así como dar una mayor coherencia a la notación;
- 2) afrontar una revisión a fondo de aquellas partes del libro susceptibles de ser manifiestamente mejoradas y actualizadas; y, finalmente,
- 3) añadir nuevos contenidos que en la primera edición no tuvieron cabida por diversas cuestiones pero que, tras el paso de los años, hemos visto ahora con mucha más claridad su pertinente inclusión con objeto de completar el volumen. En este sentido podemos garantizar con gran satisfacción que la gran mayoría de afirmaciones que se realizan están ampliamente justificadas y el libro es, prácticamente, autocontenido.

Yendo al detalle, en esta segunda edición y en la parcela de teoría de curvas, hemos añadido la prueba del teorema de rotación de las tangentes, la caracterización de las curvas convexas mediante la curvatura y el teorema de los cuatro vértices. En lo que respecta a superficies regulares, hemos afrontado una reestructuración de los contenidos con objeto de que haya un capítulo específico sobre cálculo variacional,

pues este nos permite estudiar conceptos como geodésicas y superficies mínimas desde un punto de vista más moderno y global. Además, hemos demostrado la existencia de parametrizaciones con características especiales, hecho que nos ayuda a completar ciertos resultados que en la primera edición aparecían únicamente como enunciados. Por otra parte, probamos que la exponencial es una aplicación diferenciable en un abierto y, utilizando las mismas herramientas, justificamos la existencia de los llamados *entornos uniformemente convexos*. Estos son imprescindibles para algunos resultados globales como el teorema de Hopf-Rinow. Finalmente, añadimos el enunciado y la prueba del famoso teorema de Hilbert sobre la no existencia de superficies completas con curvatura constante negativa.

Con carácter general hemos incorporado nuevos ejercicios que complementan y refuerzan tanto los temas de la primera edición como los recién añadidos para esta segunda. Además, debemos remarcar que una gran parte de las nuevas demostraciones que aportamos de algunos de los teoremas tienen pasos y detalles de alta dificultad técnica. Siguiendo el espíritu de la primera edición, en cuya introducción hablábamos de que el libro era un «manual para estudiantes», hemos procurado, en la medida de nuestras posibilidades, desbrozar el camino y aclarar al máximo algunos puntos no suficientemente explícitos de estas pruebas tal y como las hemos estudiado en otros volúmenes sobre el tema. Finalmente, se han añadido numerosas referencias bibliográficas (y actualizado a nuevas ediciones muchas de las ya existentes) que juzgamos relevantes y que han aparecido en el transcurso de estos últimos diez años.

Quisiéramos terminar este prefacio dando las gracias a todos nuestros compañeros del Área de Geometría y Topología de la Universidad de Murcia. Especialmente queremos remarcar el trabajo de los profesores Luis J. Alías y Ángel Ferrández que, en su continua labor diaria impartiendo la asignatura y utilizando este manual, han encontrado gran cantidad de aspectos, errores y erratas que han podido subsanarse. Finalmente, queremos hacer una mención especial al profesor Jesús Yepes por su atenta y cuidada revisión de los aspectos más técnicos de las demostraciones. Gracias a su ayuda hemos conseguido detectar los puntos débiles de los argumentos y hemos sido capaces de elaborar un discurso mucho más coherente y sólido. Por último, tampoco podemos olvidarnos aquí de Editorial CSIC, que creyó en este proyecto desde el primer momento y nos ha ofrecido la oportunidad de mejorarlo y extenderlo. Sinceramente, esperamos haberlo conseguido.

MARÍA DE LOS ÁNGELES HERNÁNDEZ CIFRE  
JOSÉ ANTONIO PASTOR GONZÁLEZ

## Prólogo

Aceptar la realización del prefacio de una obra como esta supone una íntima satisfacción producto de la generosidad de sus autores, a quienes conozco desde hace años y de quienes solo puedo tener palabras de agradecimiento por la deferencia con que me han obsequiado. Intentaré corresponderles de la mejor manera que sé: haciendo un juicio tan imparcial y objetivo como el libro merece.

Los doctores María de los Ángeles Hernández Cifre y José Antonio Pastor González, primero investigadores y docentes en Geometría Diferencial y ahora autores de *Un curso de Geometría Diferencial (teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador)*, a pesar de su juventud, ya gozan de un merecido reconocimiento en sus ámbitos de trabajo. Puesto que les triplico en el tiempo dedicado a estos menesteres universitarios, ellos pensaron que sería una buena razón para que les diera mi visión sobre su obra, es decir, querían contrastar mi larga experiencia con la suya, sobre todo, supongo, por los muchos textos que sobre esta materia han pasado por mis manos y cuyo contenido he evaluado en aras de lograr los mejores resultados docentes.

Y, en efecto, así ha sido, pues el campo de la Geometría Diferencial, quizá el de mayor reconocimiento internacional de la matemática española, ha tenido un desarrollo espectacular en las últimas tres décadas y quienes participamos activamente en la forja del éxito que ahora disfrutamos apenas disponíamos del «libro de tapas negras» del profesor Vidal Abascal. La llegada a nuestras manos de la obra del profesor Do Carmo fue un acontecimiento tan excitante como novedoso y eficaz; una especie de ruptura temporal que marcó un antes y un después en la enseñanza de la Geometría de las Curvas y Superficies. Un hito, digamos, que perdura en nuestros días y que sigue siendo referencia obligada para nuestros estudiantes. Después vinieron otras obras, como la excelente de Montiel y Ros, y otras muchas, producto de la gran vitalidad de este campo. Con todo, se hacía difícil una nueva incursión en esta empresa, un reto, diría yo, pero el amor por la docencia y el trabajo bien hecho, unido a una fe ciega en lograr un producto final de calidad contrastada y suficientemente original, han conducido al éxito.

Se trata de una obra sobre curvas y superficies que no pretende ni más ni menos que eso, pero vistas desde un escalón superior: la geometría de Riemann. Existen muchos y buenos libros sobre esta materia, la mayoría citados por los autores, pero como este es muy especial y, sin duda, se encuentra entre los mejores, me limitaré a destacar los aspectos más novedosos que introduce y que resumo en siete puntos.

- El concepto de *superficie minimal*, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado, así como por la gran actividad investigadora que genera, es de suma

importancia y así lo han entendido los autores, que lo han abordado, extensamente y con esmero al final del capítulo 4.

- La propiedad minimizante de las geodésicas (teorema 5.3.9) es otro detalle muy cuidado y digno de ser resaltado, pues la demostración suele quedar muy oscura, si no eliminada, en la mayoría de los textos. Aquí se ha atacado con valentía y resuelto con mucha destreza.
- *La holonomía* (6.1.2) es la sorpresa más deliciosa del texto. En efecto, la experiencia docente e investigadora de los autores les permite considerar este concepto, así como sus implicaciones geométricas y aplicaciones, con una naturalidad y soltura que a buen seguro servirá de disfrute a los lectores.
- El Teorema de Gauss-Bonnet está muy bien tratado y sus consecuencias (6.3) nos introducen de lleno en la belleza misma del resultado, que no es otra que la propia de la Geometría.
- El último capítulo, la Geometría Diferencial Global, no tiene desperdicio alguno, pues es donde se aprecia la potente herramienta del binomio Geometría-Topología para lograr los resultados más redondos que uno puede encontrar en el universo matemático.
- La mejor forma de que la materia «entre por los ojos» es hacer que el estudiante vea los objetos que está considerando y clasificando y que sobre las gráficas analice sus propiedades. Para lograr ese objetivo los autores han elegido el programa Mathematica<sup>®</sup>, y sobre él han construido unas prácticas muy bien diseñadas y útiles para que el lector visualice todo lo estudiado y que al mismo tiempo le den libertad para ejercitar su imaginación con sus propios proyectos.
- La colección de ejercicios es la guinda que corona el pastel. Jamás se ha visto un texto de estas características con todos los ejercicios resueltos. ¡Qué suerte la de los estudiantes que llegan ahora! Es fácil adivinar las alabanzas que dedicarán a los autores.

En resumen, un excelente trabajo que muy pronto dará sus frutos y que perdurará en la mente de los matemáticos del futuro. Obras como esta, que «hacen Matemática» y crean vocaciones, bienvenidas sean.

No comenzaré felicitando a los autores, pero sí a la dirección de Editorial CSIC por el acierto de su nueva política editorial y de la selección de esta obra. También al Área de Geometría y Topología del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia, quienes comparten el café de las once con los doctores Hernández-Cifre y Pastor, pues seguro que este libro «huele un poquito a expreso». Y muy especialmente a los estudiantes, ya físicos, ya ingenieros, ya arquitectos, ya biólogos, ya cualesquiera que sean, pues enseguida apreciarán «la Geometría bien hecha». Mi felicitación a los autores irá a través de ellos.

MANUEL BARROS DÍAZ  
Catedrático de Geometría y Topología  
Universidad de Granada

## Introducción

Para mí no hay emoción o satisfacción comparable a la que produce la actividad creadora, tanto en ciencia como en arte, literatura u otras ocupaciones del intelecto humano. Mi mensaje, dirigido sobre todo a la juventud, es que si sienten inclinación por la ciencia, la sigan, pues no dejará de proporcionarles satisfacciones inigualables.

SEVERO OCHOA

La Geometría Diferencial es una disciplina presente en el núcleo central de todos los estudios de Matemáticas, así como una herramienta básica en el desarrollo de otras ciencias, como Física, Biología, Arquitectura e Ingeniería. En este libro presentamos un Curso de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, que es el resultado de nuestra experiencia en dicho campo como docentes e investigadores.

Para el estudio de esta disciplina se requiere un cierto grado de madurez científica. Los primeros aspectos que se deben tener presentes son los prerequisites de la asignatura: Topología, Cálculo, Álgebra y Ecuaciones Diferenciales fundamentalmente. Conscientes de esta situación y de estos requerimientos previos, hemos pretendido elaborar un texto lo más didáctico y autocontenido posible, dentro de nuestras competencias como profesores de Geometría y Topología. Así, con un lenguaje claro, directo y sencillo, con el desarrollo de demostraciones detalladas y, finalmente, con una exhaustiva relación de ejercicios (incluyendo también la resolución de estos y el uso de *software* específico como instrumento para ayudar a comprender muchos de los contenidos), pensamos que el estudiante tiene en este libro una buena herramienta para encarar el aprendizaje de esta singular rama de las Matemáticas, verdadero puente que comunica y relaciona diferentes disciplinas como la Topología, el Álgebra y el Análisis.

En relación a los contenidos, hemos tenido que resolver el compromiso entre abarcar el mayor número de tópicos posibles, por un lado y, por otro, desarrollar con suficiente claridad y detalle cada uno de los temas tratados. Creemos haber encontrado un equilibrio más o menos razonable: los contenidos son los estándares en la mayoría de los cursos de Geometría Diferencial, y los tópicos cuyos desarrollos, por diversas razones, no han tenido cabida en el libro, se nombran e interrelacionan con los que sí aparecen. Además, para estos temas proporcionamos una extensa bibliografía con objeto de satisfacer a los estudiantes más avanzados.

Este curso se inspira en los dos mejores libros, a juicio de los autores, sobre Geometría de Curvas y Superficies que existen editados en castellano: el clásico libro de

do Carmo [16] y el original Montiel y Ros [38]. Estos dos textos son radicalmente distintos: el primero, mucho más antiguo, ofrece un tratamiento clásico de la mayor parte de problemas (decimos *clásico*, aunque en su momento fue evidentemente novedoso). Se trata de un texto enfocado al alumno de nivel medio y hace referencia continuamente a aspectos y temas no contenidos explícitamente en el libro (resultados de ecuaciones diferenciales y tópicos sobre topología de superficies). El segundo es un libro con un tratamiento más moderno y está inspirado directamente en la experiencia de los autores como investigadores de primera fila. Este hecho hace que la manera de afrontar los distintos tópicos sea, con frecuencia, novedosa y audaz. Aun así, tal aproximación se nos antoja en ocasiones ciertamente compleja para un alumno que está cursando sus primeros años como graduado, y la vemos más conveniente para estudios más avanzados.

Inspirados en el espíritu de ambos textos, y teniéndolos como referencia, hemos pretendido elaborar nuestra propuesta recogiendo las que, a nuestro juicio, consideramos que son las mejores características de ambos. Es la «ventaja» de ir por detrás: que uno hereda todo lo bueno que hubo antes. Esperamos haberlo conseguido y, en cualquier caso, queremos remarcar de nuevo el hecho de que estamos ante un Curso de Geometría, esto es, un libro cuya única pretensión (como si fuera poca) es ser un buen libro de texto para que los estudiantes aprendan.

No queremos terminar esta introducción sin hacer referencia al período crucial en el que nos encontramos a nivel universitario, con una reforma pendiente de gran calado como resultado de la adaptación de nuestros estudios al ámbito europeo. En este sentido, este es un libro de texto enfocado a satisfacer tanto la demanda de los futuros graduados como las necesidades de los estudiantes de postgrado en Matemáticas. Recordemos que los contenidos de las nuevas titulaciones se organizan en materias y estas, a su vez, se desglosan en asignaturas. A modo de ejemplo, tal y como recomienda el Libro Blanco para el Título de Grado en Matemáticas, dentro de los contenidos obligatorios del grado debe figurar la materia «Topología y Geometría Diferencial», con una carga lectiva que oscilará entre los 12,5 y los 17,5 créditos ECTS, según estipule cada universidad en sus proyectos de grado. A día de hoy, prácticamente todos los proyectos presentados para su verificación desglosan esta materia en dos o más asignaturas, en las que la Geometría Diferencial aparece como la protagonista indiscutible. Así pues, y sin temor a equivocarnos, podemos decir que se trata de una materia de «paso obligado» para todos los futuros graduados y estudiantes de postgrado, que jugará un papel decisivo en su formación como profesionales de las Matemáticas.

Con independencia de su lógica ubicación dentro de los estudios de Matemáticas, este curso puede utilizarse como libro de consulta en otras disciplinas científicas, debido al carácter transversal e interdisciplinar de la Geometría Diferencial. Así, en los estudios de Física, una de las materias más frecuentes es la Teoría de la Relatividad y sus diversas consecuencias e implicaciones. Las Matemáticas que se utilizan en estas disciplinas son fundamentalmente Geometría Diferencial, y los centros que imparten

actualmente la licenciatura de Física (y que impartirán también los futuros grados y másteres) introducen en sus *curricula* asignaturas con nombres dispares (Métodos Matemáticos para la Física, Álgebra y Geometría, Geometría Diferencial, etc.) cuyo cuerpo central de estudio está ampliamente tratado en este libro. En este sentido, este curso de Geometría Diferencial es también una herramienta idónea, ya que el carácter básico del texto y sus numerosos ejemplos hacen de él un eficaz instrumento para el estudiante de Ciencias Físicas.

Finalmente, en lo que respecta a carreras como Biología, Arquitectura e Ingeniería, el libro trata algunos temas puntuales que aparecen en estas disciplinas como tópicos avanzados (la geometría del ADN, formas óptimas de la naturaleza, configuraciones geométricas aplicadas a la arquitectura, geodesia, cartografía, topografía, etc.). Así, pensamos también que este curso puede ser muy útil para estudiantes avanzados de estas carreras técnicas que necesitan consultar, al menos puntualmente, un texto sobre Geometría.

Con el deseo de que nuestra aportación signifique un acercamiento enriquecedor a la Geometría Diferencial por parte de los alumnos de Matemáticas y de todas estas otras disciplinas científicas, nos despedimos, no sin antes agradecer a nuestros compañeros, los profesores Luis José Alías Linares, Pascual Lucas Saorín, Miguel Ángel Meroño Bayo y Pablo Mira Carrillo la ayuda prestada, los buenos consejos y las acertadas indicaciones, correcciones y sugerencias en la redacción de este libro. Muy especialmente, queremos manifestar nuestra gratitud al profesor Ángel Ferrández Izquierdo, pues apostó decididamente por este proyecto desde sus inicios, facilitándonos enormemente la tarea de convertir, lo que era un sueño sencillo, en un ambicioso proyecto editorial.

MARÍA DE LOS ÁNGELES HERNÁNDEZ CIFRE  
JOSÉ ANTONIO PASTOR GONZÁLEZ