

## Sumario

Prefacio a la segunda edición .....	15
Prólogo .....	17
Introducción .....	19
Terminología básica .....	23
Capítulo I	
<b>Curvas en el plano y en el espacio</b> .....	27
1.1. Curvas parametrizadas. La longitud de arco .....	27
1.1.1. El cambio de parámetro y la longitud de arco .....	29
1.2. Teoría local de curvas planas .....	34
1.2.1. La curvatura y el diedro de Frenet .....	34
1.2.2. Teorema fundamental de la teoría local de curvas planas .....	36
1.2.3. Evolutas, involutas y curvas paralelas .....	39
1.2.4. Comparación de dos curvas en un punto .....	41
1.3. Teoría local de curvas en el espacio .....	42
1.3.1. La curvatura, la torsión y el triedro de Frenet .....	43
1.3.2. Teorema fundamental de la teoría local de curvas en el espacio .....	46
1.4. Teoría global de curvas planas .....	49
1.4.1. Curvas convexas .....	49
1.4.2. La desigualdad isoperimétrica .....	52
1.4.3. El teorema de los cuatro vértices .....	56
El teorema de rotación de las tangentes .....	56
Caracterizando las curvas convexas .....	59
El teorema de los cuatro vértices .....	61
Ejercicios .....	65
Capítulo II	
<b>Las superficies regulares</b> .....	71
2.1. Definición y primeros ejemplos .....	72
2.1.1. Criterios prácticos para la determinación de superficies .....	76
2.1.2. Propiedades de las superficies regulares .....	80
2.1.3. El cambio de coordenadas .....	83

2.2. Funciones diferenciables definidas en superficies . . . . .	85
2.2.1. Aplicaciones diferenciables definidas entre superficies . . . . .	87
2.2.2. Difeomorfismos entre superficies . . . . .	90
2.3. El plano tangente . . . . .	91
2.4. La diferencial de una aplicación entre superficies . . . . .	93
2.4.1. La diferencial de una función real sobre una superficie . . . . .	93
2.4.2. La diferencial de una aplicación entre superficies . . . . .	95
2.5. La primera forma fundamental . . . . .	100
2.5.1. Aplicaciones de la primera forma fundamental: midiendo lon- gitudes, ángulos y áreas . . . . .	102
Midiendo longitudes . . . . .	102
Midiendo ángulos . . . . .	103
Midiendo áreas . . . . .	103
Ejercicios . . . . .	107

### Capítulo III

<b>El teorema <i>Egregium</i> de Gauss</b> . . . . .	111
3.1. Campos de vectores en superficies . . . . .	113
3.2. Orientación de superficies . . . . .	116
3.2.1. Otra forma de estudiar la orientabilidad . . . . .	118
3.2.2. La estructura compleja de una superficie . . . . .	122
3.2.3. Bases positivas y negativas . . . . .	122
3.2.4. Sobre la orientabilidad en este texto . . . . .	123
3.3. La segunda forma fundamental . . . . .	123
3.4. La aceleración de una curva: curvaturas geodésica y normal . . . . .	128
3.4.1. La curvatura geodésica . . . . .	128
3.4.2. La curvatura normal . . . . .	129
3.4.3. Interpretación geométrica de la curvatura normal . . . . .	130
3.5. Las curvaturas principales . . . . .	133
3.5.1. Puntos umbilicales . . . . .	136
3.6. Expresión local de la segunda forma fundamental, la curvatura de Gauss y la curvatura media . . . . .	139
3.7. La geometría de la curvatura de Gauss . . . . .	145
3.8. Isometrías locales . . . . .	146

3.9. El teorema <i>Egregium</i> de Gauss .....	150
3.9.1. Las fórmulas de Gauss y de Weingarten .....	151
3.9.2. Ecuaciones de compatibilidad. Teorema <i>Egregium</i> de Gauss ..	153
3.10. Aplicaciones conformes e isoareales. Cartografía .....	156
Ejercicios .....	165
Capítulo IV	
<b>Geodésicas en superficies</b> .....	171
4.1. La derivada covariante y el transporte paralelo .....	172
4.1.1. Campos de vectores paralelos .....	174
4.1.2. El transporte paralelo .....	177
4.2. Geodésicas .....	179
4.2.1. Existencia y unicidad de geodésicas en una superficie .....	182
4.2.2. La curvatura geodésica .....	185
4.3. La aplicación exponencial .....	186
4.3.1. Entornos normales y uniformemente normales .....	190
4.3.2. El lema de Gauss .....	195
4.3.3. Las coordenadas normales .....	202
4.3.4. Las coordenadas geodésicas polares .....	203
Ejercicios .....	209
Capítulo V	
<b>Cálculo variacional en superficies</b> .....	213
5.1. Variaciones de la longitud. Las fórmulas de variación .....	214
5.1.1. La primera fórmula de variación para la longitud de arco .....	216
5.1.2. La segunda fórmula de variación para la longitud de arco .....	221
5.2. Integración en superficies .....	224
5.2.1. Una aproximación intuitiva al concepto de área .....	224
5.2.2. Integración de funciones .....	226
5.3. Variaciones del área: las superficies minimales .....	231
5.3.1. Las superficies minimales: un poco de historia .....	232
5.3.2. Las distintas definiciones de superficie minimal .....	235
Las superficies minimales como puntos críticos del área .....	236
La aplicación de Gauss de una superficie minimal .....	238
Parametrizaciones isotermas en superficies minimales .....	239

5.3.3. Los primeros ejemplos de superficies minimales . . . . .	240
Ejercicios . . . . .	245
Capítulo VI	
<b>Geometría Diferencial Global</b> . . . . .	249
6.1. Completitud. El teorema de Hopf-Rinow . . . . .	250
6.1.1. Distancia intrínseca en una superficie . . . . .	251
6.1.2. El teorema de Hopf-Rinow . . . . .	255
Algunos resultados previos . . . . .	255
El teorema de Hopf-Rinow . . . . .	260
Consecuencias del teorema de Hopf-Rinow . . . . .	262
6.1.3. El teorema de Bonnet . . . . .	264
6.2. El teorema de rigidez de la esfera . . . . .	266
6.3. El teorema de Hilbert . . . . .	273
Ejercicios . . . . .	281
Capítulo VII	
<b>El teorema de Gauss-Bonnet</b> . . . . .	283
7.1. El teorema de Gauss-Bonnet (versión local) . . . . .	283
7.1.1. El ángulo de rotación de una curva plana regular a trozos . . . . .	284
7.1.2. Holonomía . . . . .	286
Introducción: una pequeña historia . . . . .	286
La geometría de la holonomía . . . . .	287
Una aplicación: el péndulo de Foucault . . . . .	290
7.1.3. La curvatura geodésica en una parametrización ortogonal . . . . .	292
La curvatura geodésica de las curvas coordenadas . . . . .	292
La curvatura geodésica de una curva arbitraria . . . . .	293
7.1.4. El teorema de Green en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	294
7.1.5. El teorema de Gauss-Bonnet (versión local) . . . . .	295
7.2. El teorema de Gauss-Bonnet (versión global) . . . . .	296
7.2.1. Triangulaciones. La característica de Euler-Poincaré . . . . .	297
7.2.2. El teorema de Gauss-Bonnet (versión global) . . . . .	300
7.3. Consecuencias del teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	303
7.3.1. Una aplicación a la Geometría clásica . . . . .	307
Ejercicios . . . . .	311

## Apéndices

<b>Prácticas con Mathematica®</b> .....	315
Apéndice A: Curvas. Prácticas con Mathematica® .....	317
A.1. Geometría diferencial de curvas planas .....	317
A.1.1. La curvatura de una curva plana y la longitud de arco .....	317
A.1.2. Representación gráfica de curvas .....	318
A.1.3. Algunos ejemplos de curvas planas clásicas .....	318
A.1.4. Gráficas de funciones definidas a trozos .....	323
A.1.5. Generación dinámica de algunas curvas .....	323
A.1.6. Evolutas y curvas paralelas .....	325
A.2. Geometría diferencial de curvas en el espacio .....	326
A.2.1. Representación gráfica de curvas alabeadas .....	326
A.2.2. El triedro de Frenet, la curvatura y la torsión .....	327
Apéndice B: Superficies. Prácticas con Mathematica® .....	329
B.1. Ejemplos de superficies .....	329
B.1.1. Superficies de revolución .....	330
B.1.2. Superficies no orientables .....	331
B.1.3. Superficies minimales .....	333
B.2. La curvatura de Gauss y la curvatura media .....	334
B.3. Geodésicas .....	335
Apéndice C: Soluciones a los ejercicios .....	337
Soluciones a los ejercicios del Capítulo I .....	337
Soluciones a los ejercicios del Capítulo II .....	346
Soluciones a los ejercicios del Capítulo III .....	353
Soluciones a los ejercicios del Capítulo IV .....	372
Soluciones a los ejercicios del Capítulo V .....	383
Soluciones a los ejercicios del Capítulo VI .....	390
Soluciones a los ejercicios del Capítulo VII .....	397
Bibliografía .....	407
Índice terminológico .....	413