Midiendo el universo

> "La geometría es quizá la más elemental de las ciencias que puede estudiar el ser humano, usando procesos puramente intelectuales, para hacer predicciones (basadas en la observación) del mundo físico".
>
> Coxeter (1907-2003)

Es el año 235 a. C. y Eratóstenes logra medir el radio de la Tierra mediante técnicas geométricas. Para ello mide primero el ángulo de elevación del sol en Alejandría y en la antigua Swenet, ahora conocida como la ciudad de Asuán, en Egipto. Las mide a mediodía, y toma como hipótesis que la Tierra tiene forma esférica y que el sol está suficientemente lejos como para que sus rayos sean paralelos sobre la superficie terrestre a la misma hora. A partir de ahí un poco de trigonometría resuelve el problema.

A lo largo de la historia, las matemáticas han estado siempre unidas al desarrollo de las demás ciencias. Unas veces las matemáticas han sido simples herramientas para la resolución de problemas numéricos que preocupaban a otras ramas de la ciencia; otras veces los avances teóricos de las matemáticas han arrojado nueva luz y han inducido ideas que han llegado a causar revoluciones en esas otras ciencias. Pero también ha ocurrido lo contrario, en la necesidad de las demás ciencias para estructurar, medir o analizar sus resultados, las matemáticas han ido evolucionando en la medida en que se las necesitaba. Más aún, en muchas ocasiones las matemáticas se han visto revolucionadas por el simple proceso de hacer rigurosos, en lenguaje matemático, los descubrimientos sobre el universo, o incluso del arte. De esta forma, las ciencias y las matemáticas se han alimentado mutuamente a lo largo de la historia.

Pero hablar de las matemáticas en general se ha convertido actualmente en un proyecto extremadamente ambicioso. Las matemáticas son una ciencia que esconde en su seno diversas y muy fructíferas áreas. Es decir, al igual que hay diferentes formas de observar la realidad, y diferentes propiedades a estudiar en el mundo físico, hay diferentes formas de entender matemáticamente lo que nos rodea. Siendo esto así, podemos dividir las matemáticas en al menos tres bloques constitutivos: el análisis, el álgebra y la geometría, entendiendo de esta forma las matemáticas como el estudio de las cantidades, las estructuras y el espacio.

El estudio del espacio y las formas que lo habitan se remonta al inicio de las matemáticas conocidas. Desde las crecidas del Nilo y el intento de medir las tierras que quedarían cubiertas por sus aguas al portentoso cálculo del radio de la Tierra. Y este estudio del espacio llega a impregnar nuestra forma de entender físicamente el universo. Lo veremos, por ejemplo, en Einstein al mostrar la fuerza de la gravedad como una consecuencia de la geometría del universo.

Pero contrariamente a lo que estamos acostumbrados, la geometría no es una sino muchas, dependiendo tanto de lo que se observa como de las herramientas de las que se vale para construir su razonamiento. Es más, el descubrimiento y desarrollo de estas diversas manifestaciones de la geometría ha impulsado descubrimientos en ciencias como la física o incluso ha sido inducido por los avances y necesidades de las otras ciencias.

Las mil y una caras de la geometría

Se dice que en un principio fueron los egipcios quienes inventaron de alguna forma la geometría. Esta nace como resultado de la necesidad de medir sus tierras anegadas por las crecidas del Nilo. Más adelante, Tales de Mileto (624-546 a. C.)

trae a Grecia este saber y lo llama γεωμετρία es decir, geometría, donde γεω significa tierra y μετρία quiere decir medir.

La geometría empezó así estudiando aquello que nos rodea, las tierras que aramos, las calles que pisamos, es decir, lo que tenemos próximo a nosotros. A esta geometría la llamamos geometría euclídea, y que estudia las formas que observamos a nuestro alrededor, las diferentes figuras geométricas que forman nuestro mundo. La propiedad crucial de esta geometría será que las líneas paralelas nunca se cortan en el entorno de esta geometría. Es la geometría del observador escéptico que observa las vías del tren y dice: ¡son paralelas! Sin embargo, existen otras geometrías, por ejemplo la geometría proyectiva que afirma que aunque las vías del tren que están junto a mí y son paralelas aquí, en el horizonte ¡se cortan! Este segundo observador, "proyectivo", se preocupa por la representación de lo que se encuentra lejos de su entorno. La geometría proyectiva es la geometría de las perspectivas; la geometría del observador que incluye el infinito como algo tangible, una región más del espacio que le rodea, algo, en cierto modo, alcanzable.

El concepto de "rectas paralelas" será estudiado de manera metódica a partir del siglo XVIII y se descubrirán las primeras geometrías no euclídeas, conocidas como las geometrías imaginarias. Estas serán el primer paso para una selva de geometrías, tan rica y complicada como los distintos grupos de transformaciones del espacio conocidas. Es decir, tendremos tantas geometrías como conjuntos de movimientos de los objetos en el espacio. Esos conjuntos de movimientos satisfacen una cierta estructura llamada "estructura de grupo" que consiste en una serie de reglas, algebraicas, que nos permiten organizarlos. Uno de los grandes poderes de las matemáticas es el tener como herramientas de trabajo estructuras abstractas como la de grupo.

Al distinguir la geometría euclídea de la geometría proyectiva apuntábamos a la posición del observador con respecto al objeto a observar. Pero existen muchas más variables que provocan esta variedad de geometrías. Por ejemplo, cuando hacemos hincapié en las transformaciones admitidas por el espacio a estudiar estamos refiriéndonos a la visión de Felix Klein y su "programa de Erlangen", donde cada grupo de transformaciones del espacio define una geometría. Si en lo que pensamos es en las herramientas matemáticas usadas para estudiar ese espacio, podemos distinguir entre la geometría diferencial, donde el análisis predomina sobre el álgebra, y la geometría algebraica, donde predominan los métodos y conceptos algebraicos. Hace dos mil años los métodos empleados eran la regla y el compás, ahora mismo la geometría se vale del álgebra más avanzada y de un análisis que ha ido desarrollándose de manera sostenida en los últimos trescientos años.

Nuestro viaje no será exhaustivo pero recorrerá la mayor parte de las geometrías que conocemos actualmente, cómo surgen, lo revolucionario de su aparición y la revolución que en el pensamiento estas implican o que les precede. En algunos casos, estas revoluciones efectivamente suponen un cambio radical en el modelo de pensamiento de la época e incluso son reacias a aparecer pues resultará difícil reunir el valor para ir contracorriente. Este es, por ejemplo, el caso de las geometrías imaginarias, intuidas por Gauss pero realmente impulsadas por Bolyai y Lobachevski.

Esta tendencia de las matemáticas, en este caso de la geometría, a romper con la tradición tanto como sea necesario para profundizar o avanzar en su desarrollo se hará firme a lo largo de la historia. El rigor lógico logrado a través de los siglos resulta una base segura que no depende de la experimentación. Esta es la idea subyacente en el establecimiento de la geometría algebraica moderna. El carácter visual de la geometría induce a una mayor confianza en la intuición. Esto fue quizá la causa de la deriva de la escuela italiana de la geometría algebraica, deriva que impulsó a Zariski a sentar las bases de la geometría algebraica moderna, que se fundamentan en el trabajo de Noether y que usan el poder lógico del álgebra moderna.

Este rigor tan ansiado indudablemente tiene sus límites. El teorema de incompletitud de Gödel (1931) nos dice que todo sistema axiomático que contenga como base la aritmética tendrá sus limitaciones. Es decir, en el desarrollo de sistema axiomático de tales características se llegará a probar que ciertos enunciados son verdaderos y falsos al mismo tiempo. Pero esa es otra cuestión. Ahora comenzamos un viaje que nos muestra cómo ven y cómo vieron el mundo los geómetras, cómo lo revolucionaron y se dejaron revolucionar por él.

Son muchas las caras de la geometría y nosotros no abarcaremos todas. Actualmente cuando un geómetra se presenta a otro geómetra se anuncia como geómetra algebraico o diferencial, diferenciando si en las herramientas que utiliza usa mayoritariamente el análisis o el álgebra. Luego va más allá, puede ser real o complejo, queriendo decir que los coeficientes en las fórmulas que maneja se hallan en el cuerpo de los números reales o en el de los números complejos (aquellos en los que es posible una solución para $x^2 = -1$, es decir, números de la forma $z = a + ib$ donde a y b son nuestros números reales e i es el número imaginario sintetizando la idea de ser $i = \sqrt{-1}$).

Según la clasificación de la American Mathematical Society del año 2010, ampliamente aceptada por la comunidad matemática, existen al menos 23 apartados relacionados con la geometría. Es decir, en esta clasificación las áreas de las matemáticas se dividen en 97 secciones y de ellas 23 tienen relación con la geometría. Por ejemplo, la sección 14 se corresponde con la geometría algebraica, la sección 51 con la geometría de una manera general, mientras en la sección 52 se trata la geometría convexa y discreta, y la sección 53 a la geometría diferencial, incluyendo esta última las geometrías riemanniana y simpléctica.

Es pues entendido entre los matemáticos que no hay una geometría sino muchas. Aunque dicho así, esto es cierto y falso al mismo tiempo. Si la geometría consiste en el estudio del espacio, tenemos una variedad de familias geométricas con diversos apellidos. Al estudio del espacio se dedica la geometría y esta se concreta en las múltiples formas de observarlo y trabajarlo y las llamaremos las geometrías.

Esa desconocida y fundamental topología

La geometría mide el espacio, pero antes de la idea de medir está la idea matemática de espacio en sí mismo. Cuando medimos creamos la noción de espacio medido, rígido. Antes de esa medida, el espacio es deformable. Este concepto de espacio al que le permitimos deformaciones es el objeto de estudio de la topología, del griego topos, τόποσ, que significa espacio, y logos, λόγοσ, que significa ciencia o estudio.

El clásico ejemplo, de obligada mención, para explicar qué es la topología es el de la taza. Imaginemos que estamos empezando nuestro día con un desayuno compuesto por una taza de chocolate y un donut. Para la topología, la taza que contiene el chocolate no se diferencia del donut. Las reglas de la topología permiten deformar objetos, estirarlos o encogerlos, retorcerlos incluso, pero nunca romperlos (ni tampoco pegarlos). Al carecer de una medida, una regla de medir, las deformaciones son simples manifestaciones del mismo objeto. En la figura 1 podemos ver cómo el asa de la taza se estira y "engorda" hasta convertirse en el donut. (Para aquellos preocupados por el chocolate, este simplemente se convierte en el recubrimiento de nuestro nuevo donut).

Figura 1
Deformación de la taza al donut.

Fuente: Elaboración propia.

La topología se nos muestra así como una parte de las matemáticas muy intuitiva y flexible, pero sorprendentemente es posible, como siempre en matemáticas, darle un rigor y una formalización. Para explicarlo nos remitimos a sus fundamentos. Mientras que el ladrillo básico de la geometría es