

## Sumario

Prólogo .....	15
Introducción .....	17
Terminología básica .....	21
Capítulo I	
<b>Curvas en el plano y en el espacio</b> .....	25
1.1. Curvas parametrizadas. La longitud de arco .....	25
1.1.1. El cambio de parámetro y la longitud de arco .....	27
1.2. Teoría local de curvas planas .....	32
1.2.1. La curvatura y el diedro de Frenet .....	32
1.2.2. Teorema fundamental de la Teoría Local de curvas planas ....	34
1.2.3. Evolutas, involutas y curvas paralelas .....	36
1.2.4. Comparación de dos curvas en un punto .....	38
1.3. Teoría local de curvas en el espacio .....	40
1.3.1. La curvatura, la torsión y el triedro de Frenet .....	40
1.3.2. Teorema fundamental de la Teoría Local de curvas en $\mathbb{R}^3$ ....	43
1.4. Teoría global de curvas planas .....	46
1.4.1. Curvas convexas .....	47
1.4.2. La desigualdad isoperimétrica .....	50
Ejercicios .....	55
Capítulo II	
<b>Las superficies regulares</b> .....	59
2.1. Definición de superficie .....	60
2.1.1. Criterios prácticos para la determinación de superficies .....	64
2.1.2. Propiedades de las superficies regulares .....	68
2.1.3. El cambio de coordenadas .....	71
2.2. Funciones diferenciables definidas en superficies .....	73
2.2.1. Aplicaciones diferenciables definidas entre superficies .....	75
2.2.2. Difeomorfismos entre superficies .....	78
2.3. El plano tangente .....	79
2.4. La diferencial de una aplicación entre superficies .....	81
2.4.1. La diferencial de una función real sobre una superficie .....	81

2.4.2.	La diferencial de una aplicación entre superficies	83
2.5.	La primera forma fundamental	88
2.5.1.	Aplicaciones de la primera forma fundamental	90
	Midiendo longitudes	90
	Midiendo ángulos	91
	Midiendo áreas	91
	Ejercicios	95
Capítulo III		
	<b>El teorema Egregium de Gauss</b>	99
3.1.	Orientación de superficies	100
3.1.1.	Otra forma de estudiar la orientabilidad	103
3.1.2.	La estructura compleja de una superficie	107
3.1.3.	Bases positivas y negativas	107
3.1.4.	Sobre la orientabilidad en este texto	108
3.2.	La segunda forma fundamental	108
3.3.	La aceleración de una curva: curvaturas geodésica y normal	113
3.3.1.	La curvatura geodésica	113
3.3.2.	La curvatura normal	114
3.3.3.	Interpretación geométrica de la curvatura normal	115
3.4.	Las curvaturas principales	118
3.4.1.	Puntos umbilicales	121
3.5.	Expresión local de $\mathbb{I}_p$ , $K$ y $H$	124
3.6.	La geometría de la curvatura de Gauss	130
3.7.	Isometrías locales	131
3.8.	El teorema Egregium de Gauss	135
3.8.1.	Las fórmulas de Gauss y de Weingarten	136
3.8.2.	Ecuaciones de compatibilidad. Teorema Egregium de Gauss	138
3.9.	Aplicaciones conformes e isoareales. Cartografía	141
	Ejercicios	149
Capítulo IV		
	<b>Integración en superficies. Las superficies minimales</b>	155
4.1.	Una aproximación intuitiva al concepto de área	155
4.2.	Integración de funciones	157

4.3. Las superficies minimales: un poco de historia .....	162
4.4. Las distintas definiciones de superficie minimal .....	166
4.4.1. Las superficies minimales como puntos críticos del área .....	166
4.4.2. La aplicación de Gauss de una superficie minimal .....	169
4.4.3. Parametrizaciones isotermas en superficies minimales .....	170
4.5. Los primeros ejemplos de superficies minimales .....	171
Ejercicios .....	174
Capítulo v	
<b>Geodésicas en superficies</b> .....	177
5.1. La derivada covariante y el transporte paralelo .....	178
5.1.1. Campos de vectores paralelos .....	180
5.1.2. El transporte paralelo .....	183
5.2. Geodésicas .....	185
5.2.1. Existencia y unicidad de geodésicas en una superficie .....	188
5.2.2. La curvatura geodésica .....	191
5.3. La aplicación exponencial .....	192
5.3.1. El lema de Gauss .....	197
5.3.2. Las coordenadas normales .....	204
5.3.3. Las coordenadas geodésicas polares .....	205
Ejercicios .....	211
Capítulo VI	
<b>El teorema de Gauss-Bonnet</b> .....	215
6.1. El teorema de Gauss-Bonnet (versión local) .....	215
6.1.1. El ángulo de rotación de una curva plana .....	217
El ángulo de rotación de una curva plana regular .....	217
El ángulo de rotación de una curva plana regular a trozos ....	219
6.1.2. Holonomía .....	220
Introducción: una pequeña historia .....	220
La geometría de la holonomía .....	221
Una aplicación: el péndulo de Foucault .....	224
6.1.3. La curvatura geodésica en una parametrización ortogonal ....	226
La curvatura geodésica de las curvas coordenadas .....	226
La curvatura geodésica de una curva arbitraria .....	227

6.1.4.	El teorema de Green en $\mathbb{R}^2$ .....	229
6.1.5.	El teorema de Gauss-Bonnet (versión local) .....	229
6.2.	El teorema de Gauss-Bonnet (versión global) .....	231
6.2.1.	Triangulaciones. La característica de Euler-Poincaré .....	232
6.2.2.	El teorema de Gauss-Bonnet (versión global) .....	234
6.3.	Consecuencias del teorema de Gauss-Bonnet .....	237
6.3.1.	Una aplicación a la Geometría clásica .....	241
	Ejercicios .....	244
Capítulo VII		
	<b>Geometría Diferencial global</b> .....	247
7.1.	Las fórmulas de variación .....	248
7.1.1.	La primera fórmula de variación para la longitud de arco ....	249
7.1.2.	La segunda fórmula de variación para la longitud de arco ....	253
7.2.	Complejidad. El teorema de Hopf-Rinow .....	256
7.2.1.	Distancia intrínseca en una superficie .....	257
7.2.2.	El teorema de Hopf-Rinow .....	260
	Algunos resultados previos .....	260
	El teorema de Hopf-Rinow .....	267
	Consecuencias del teorema de Hopf-Rinow .....	269
7.2.3.	El teorema de Bonnet .....	271
7.3.	El teorema de rigidez de la esfera .....	273
	Ejercicios .....	281
Apéndice		
	<b>Prácticas con Mathematica<sup>®</sup></b> .....	283
	Apéndice A: Curvas. Prácticas con Mathematica <sup>®</sup> .....	285
A.1.	Geometría diferencial de curvas planas .....	285
A.1.1.	La curvatura de una curva plana y la longitud de arco .....	285
A.1.2.	Representación gráfica de curvas .....	286
A.1.3.	Algunos ejemplos de curvas planas clásicas .....	286
A.1.4.	Gráficas de funciones definidas a trozos .....	291
A.1.5.	Generación dinámica de algunas curvas .....	291
A.1.6.	Evolutas y curvas paralelas .....	293
A.2.	Geometría diferencial de curvas en el espacio .....	294

## Sumario

A.2.1. Representación gráfica de curvas alabeadas .....	294
A.2.2. El triedro de Frenet, la curvatura y la torsión .....	295
Apéndice B: Superficies. Prácticas con Mathematica® .....	297
B.1. Ejemplos de superficies .....	297
B.1.1. Superficies de revolución .....	298
B.1.2. Superficies no orientables .....	299
B.1.3. Superficies minimales .....	301
B.2. La curvatura de gauss y la curvatura media .....	302
B.3. Geodésicas .....	303
Apéndice C: Soluciones a los ejercicios .....	305
Soluciones a los ejercicios del Capítulo I .....	305
Soluciones a los ejercicios del Capítulo II .....	313
Soluciones a los ejercicios del Capítulo III .....	319
Soluciones a los ejercicios del Capítulo IV .....	336
Soluciones a los ejercicios del Capítulo V .....	339
Soluciones a los ejercicios del Capítulo VI .....	350
Soluciones a los ejercicios del Capítulo VII .....	357
Bibliografía .....	367
Índice terminológico .....	371